Lo Esencial Sobre Conjuntos

Cuándo unir, cuándo intersectar y todo eso que podrías querer saber

Benja Vera

Abril 2019

Primera Parte: Los Conceptos

Unión

La unión entre dos conjuntos A y B la denotamos como $A \cup B$ y representa **todos los elementos que ambos conjuntos cubren**. O más precisamente *todos aquellos elementos que pertenecen a A o B* . Los matemáticos formalizamos esto con la siguiente definición:

$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$$

Se lee “ x pertenece a la unión entre A y B si y solo si x pertenece a A o x pertenece a B ”

Intersección

La intersección entre dos conjuntos A y B la denotamos como $A \cap B$ y representa **todos los elementos que ambos conjuntos tienen en común**. O más precisamente *todos aquellos elementos que pertenecen a A y B* . Los matemáticos formalizamos esto con la siguiente definición:

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Se lee “ x pertenece a la intersección entre A y B si y solo si x pertenece a A y x pertenece a B ”

Segunda Parte: Restricciones

Por contexto del problema

Típicamente a lo largo de este curso vamos a resolver distintos tipos de ecuaciones en $\mathbb{R}$. Y por lo tanto los métodos que utilicemos para resolver estas ecuaciones nos van a arrojar conjuntos de números reales (Como por ejemplo intervalos) Pero no siempre los problemas que nos hagan plantear esas ecuaciones en un principio van a admitir soluciones en forma de cualquier número real. Por ejemplo, nuestro problema podría ser uno donde nuestra incógnita fuera una cantidad discreta o contable. Como artículos vendidos, pasajes comprados o un precio que debe ser expresado en pesos. En este caso, tiene sentido decir que vamos a intersectar la solución que sea que nos arroje este problema con los números naturales (quizá incluyendo el cero, depende del contexto) o bien los enteros. Esto ya que queremos que nuestras soluciones no solo resuelvan la ecuación que nos hemos planteado sino que también deben vivir en el conjunto que estamos considerando.

Algebraicas

Sobre estas no hay mucho que decir, son la clase de restricciones que imponemos para que nuestra ecuación viva en el conjunto donde queremos que viva y no tenga ninguna forma indeterminada. Sin embargo, la razón por la que intersectamos con el conjunto que estas restricciones nos marcan va más allá de tener una solución final que tenga sentido en el problema que se nos plantea. Estas restricciones cumplen también con el rol de **eliminar soluciones falsas**. Consideremos por ejemplo la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 2} > 1$$

Una factorización rápida nos lleva a esta expresión:

$$\frac{x(x - 2)}{x - 2} > 1$$

Una vez aquí, si cancelamos $(x - 2)$ obtenemos la ecuación $x > 1$ con conjunto solución $]1, -\infty[$. Sin embargo, si reemplazamos el número 2 (¡que pertenece a este intervalo!) en la ecuación original, obtenemos que no la resuelve ya que nos entrega una forma indeterminada. Esto es ya que para hacer la cancelación del término $(x - 2)$ debemos suponer que esta expresión tiene inverso multiplicativo. Es decir, no es nula. Por lo tanto $x - 2$ no puede ser cero. Luego $x \neq 2$. Otra forma de verlo sería señalar que como $(x - 2)$ está en el denominador y las fracciones se definen como el producto entre lo que esté en el numerador y el inverso multiplicativo de lo que esté en el denominador, al plantear esta ecuación estaremos asumiendo implícitamente la existencia del inverso multiplicativo de $(x - 2)$, con lo cual no puede ser cero.

Voluntarias (Como parte de la resolución de un problema)

Supongamos la siguiente inecuación fraccionaria:

$$\frac{1}{x} \geq x \quad (1)$$

Donde ya sabemos por la sección anterior que trabajamos bajo el supuesto de que x no es cero.

Vamos a suponer primero que x fuese positivo. En cuyo caso vamos a multiplicar a ambos lados por él sin cambiar el signo de desigualdad y obtenemos lo siguiente:

$$1 \geq x^2 \quad (2)$$

Una vez aquí, podemos extraer raíz a ambos lados:

$$1 \geq |x| \quad (3)$$

Y ya que suponemos que x es positivo, el módulo se puede ignorar y tenemos la solución $x \leq 1$. Pero como todo este tiempo estuvimos trabajando con el supuesto de que x era positivo, debemos recortar este intervalo a $]0, 1]$. Ya que algunas de las otras soluciones podrían ser falsas. Y en efecto, con $x = \frac{-1}{2}$, si lo reemplazamos en la ecuación (1), obtenemos $-2 \geq \frac{-1}{2}$, que es falso. En otras palabras, lo que estamos haciendo es **interceptar nuestra solución con los reales positivos** ya que las ecuaciones (2) y (3) solo son equivalentes a la (1) suponiendo que x fuera positivo.

Ya que resolvimos esta ecuación para los reales positivos, ahora nos quedaría ver si hay soluciones en los reales negativos que nos falte encontrar. Eso queda propuesto como ejercicio. Pero la solución que obtenemos en los reales negativos será $] -\infty, -1]$. Luego, como la condición para que algún número sea solución de la ecuación (1) es pertenecer a alguno de los dos intervalos solución que hemos obtenido, tiene sentido decir que nuestro conjunto solución será la unión entre ambos. Es decir $] -\infty, -1] \cup]0, 1]$.

Lo que acabamos de hacer es particionar los reales entre los positivos y negativos ya que notamos al principio que esta ecuación se puede simplificar de distintas maneras si trabajamos en cada uno de estos dominios por separado. Sin embargo, como bien sabemos, hay métodos que nos permiten resolver estas ecuaciones sin tener que separar por casos (como el análisis por tabla de signos) pero hay otras ecuaciones donde esto es inevitable, como las **ecuaciones que incluyen funciones definidas por partes**. El caso más obvio de esto es el valor absoluto:

$$|x + 1| + |x - 1| \leq 2$$

Aquí la expresión $|x + 1|$ se comporta como $(x + 1)$ si x es mayor que -1 y como $-(x + 1)$ si x es menor que -1 . Por lo tanto tendremos que dividir la recta real en ambas partes si queremos simplificar esta ecuación. Haciendo el mismo análisis para el otro módulo (quizá con ayuda de una tabla) nos queda que esta ecuación se comporta de tres maneras distintas.

$$-(x+1) + -(x-1) \leq 2 \quad (4)$$

$$(x+1) + -(x-1) \leq 2 \quad (5)$$

$$(x+1) + (x-1) \leq 2 \quad (6)$$

Pero cada una de estas ecuaciones solo es equivalente a la ecuación original si x cumple con ciertas restricciones. Por lo tanto, intersectamos con estas para obtener nuestras soluciones parciales y luego, como cada uno de estos casos tiene soluciones que nos sirven, las unimos.

En un ánimo más abstracto (y solo para intenciones de generalizar), sea S_0 el conjunto solución demarcado por una cierta ecuación que nos interesa resolver. Y sean $U_1, U_2, \dots, U_n$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que ninguno es vacío, son disjuntos entre sí (es decir, la intersección entre cada par de ellos es vacía) y la unión entre todos ellos da $\mathbb{R}$ (En términos más simples, podemos visualizar estos conjuntos simplemente como una división de la recta entre n partes). Y sean $S_1, S_2, \dots, S_n$ las soluciones que obtenemos de cada una de estas regiones. Entonces se tiene que:

$$S_0 = (S_1 \cap U_1) \cup (S_2 \cap U_2) \cup \dots \cup (S_n \cap U_n)$$

La demostración de esta igualdad se puede hacer con algo de álgebra de conjuntos y propiedades en las que no nos interesa mucho profundizar para intenciones de este curso. Esta expresión es solo una formalización para decir que **si x es solución, lo podremos encontrar en alguna de estas partes y si x se encuentra en alguna de estas partes, entonces es solución.**

Ejercicio propuesto:

Sea f una función definida por partes como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2-x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ |x-4| & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) \leq 1$.