Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 12
Límites infinitos y al infinito
26/06/2019

Nombre: ______________________________ **Curso:** ____________

Elija sólo uno de los problemas que se presentan a continuación.
Duración: 20 minutos.

1. Determine la existencia del siguiente límite

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{(\sqrt{x-3}-1)^2}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{(\sqrt{x-3}-1)^2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{(1+2x-9)}{(\sqrt{1+2x}+3)\sqrt{x-3}-1)^2}\cdot\frac{(\sqrt{x-3}+1)^2}{(\sqrt{x-3}+1)^2}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x-3}+1)^2}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-3-1)^2} = \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x-3}+1)^2}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)}.$$

$$\boxed{\text{3,5 puntos.}}$$

Ahora procedemos a calcular límites laterales, obteniéndose

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{2(\sqrt{x-3}+1)^2}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)} = +\infty, \quad \text{ya que} \quad \lim_{x\to 4^+} \frac{2(\sqrt{x-3}+1)^2}{(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{4}{3} > 0 \text{ y } \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty,$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{2(\sqrt{x-3}+1)^2}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)} = -\infty, \quad \text{ya que} \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{2(\sqrt{x-3}+1)^2}{(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{4}{3} > 0 \text{ y } \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty,.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Por lo tanto,

$$\nexists \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{(\sqrt{x-3}-1)^2}.$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

2. Determine el valor de la siguiente expresión

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} + \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Solución: Calcularemos cada uno de los límites por separado y luego sumaremos los valores asociados.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}} &= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{3 puntos.}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2,5 puntos.}}$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} + \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{2}+3}{6}$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$