

Guía de Preparación P3

Benja Vera

Junio 2019

Límites: Algunos ejercicios conceptuales

P1.- Consideremos la función parte entera, denotada por $\lfloor x \rfloor$, que a cada número real x asigna *el mayor entero que es menor o igual a x* .

- (i) Grafique la función $\lfloor x \rfloor$
- (ii) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor$
- (iii) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor |x| \rfloor$
- (iv) Para r , un número real no entero, calcule $\lim_{x \rightarrow r} \lfloor x \rfloor$ y concluya que la función parte entera es continua en los reales no enteros.

P2.- Sea f una función par que satisface $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$ y $f(0) = 5$. ¿Es cierto que f es continua en 0?

P3.- Encuentre una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua en un solo punto de su dominio.

Más problemas de límites

P1.- Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots}}}}}$$

Hint: Analice primero los casos más simples.

- P2.-**
- (a) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n + 1}{x^m + 1}$ (Analice en los casos $n = m$, $n > m$, $n < m$)
 - (c) Analice qué sucede con sus resultados de (b) si $x \rightarrow -\infty$
 - (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}$

P3.- Sea $g(t)$ una función que satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = -4$ y $h(t)$ que satisface $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \infty$. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + g(x)}{h\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Continuidad

P1.- (Juguemos con un Teorema de Puntos Fijos)

Sea $f : A \rightarrow A$ función. Diremos que un punto $x_0 \in A$ es *punto fijo* de f si satisface $f(x_0) = x_0$. En otras palabras, el punto se mantiene invariante ante la función f . Un ejemplo abstracto sería la rotación de un disco en torno a su centro, donde el centro se mantiene fijo. Y un ejemplo numérico sería la función $f(x) = \frac{1}{x}$, cuyos únicos puntos fijos son $x = -1$ y $x = 1$. Otra forma que tenemos de escribir esto para funciones reales es decir que x_0 es punto fijo de f si la gráfica de $f(x)$ intersecta la gráfica de la función identidad (La cual, recordemos, viene dada por $g(x) = x$).

- (a) Verifique que lo que hemos dicho hasta ahora tiene sentido. Dibuje en un gráfico la función identidad y encuentre funciones que no tengan ningún punto fijo (verifique intuitivamente que esto es así, por ejemplo, en el caso de la función $\frac{-1}{x}$)

Ahora, en esta sección, vamos a intuir y luego demostrar una versión de algo llamado *Teorema de Puntos Fijos de Brouwer*. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ función. El teorema dice que si f es continua, entonces **debe** tener al menos un punto fijo.

- (b) Verifique intuitivamente esto. Dibuje varias funciones continuas (es decir, trazables sin levantar el lápiz) que vayan de $[0, 1]$ en sí mismo e intente encontrar una que no intersecte a la función identidad (si llega a encontrar un contraejemplo válido, comuníquese a su profesor lo antes posible)

Un poco más generalmente, el Teorema de Brouwer requiere que la función vaya de A en A donde A es cualquier intervalo de la forma $[a, b]$. Veamos por qué se tiene este requisito.

- (c) Encuentre una función continua $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ que no tenga punto fijo.
 (d) Encuentre una función continua $f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$ que no tenga punto fijo.

Ahora que tenemos una idea un poco más clara de en qué consiste este teorema y por qué tiene los requisitos que tiene, demostrémoslo.

Lo que vamos a hacer es apoyarnos en el Teorema de Bolzano¹, que dice que si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y existen dos puntos $x_1 < x_2$ pertenecientes a $[a, b]$ tales que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen distinto signo, entonces debe existir $x_0 \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x_0) = 0$ ¿Listo para demostrar el Teorema de Puntos Fijos de Brouwer? Respira profundo... aquí vamos. (Música épica de fondo)

Demostración: Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua y tomemos la identidad $I : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $I(x) = x$. Demostrar que existe un punto x_0 tal que $f(x_0) = x_0$ es lo mismo que probar que se tiene $f(x_0) = I(x_0)$ o bien $f(x_0) - I(x_0) = 0$. Definamos la función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como $h(x) = f(x) - I(x)$. Así, un punto fijo cumple $h(x_0) = 0$. Todo lo que hemos hecho hasta ahora se ve reflejado en la siguiente idea intuitiva:

“Un punto es fijo si y solo si intersecta a la función identidad. Y eso es lo mismo que decir que la diferencia entre la imagen de ese punto y la función identidad es nula.”

- (e) Analice los signos que la función h puede tomar en los puntos 0 y 1 para utilizar Teorema de Bolzano y concluir que debe existir al menos un punto fijo. (Bonus: mediante un razonamiento análogo, generalice esto para cualquier intervalo $[a, b]$) $\square$.
 (f) Tome una taza de té, café o su bebida favorita, revuélvala suavemente con una cuchara y piense en que, ya que el hecho de revolver es una función continua de la taza de café en sí misma, entonces en todo momento debe existir al menos una partícula en la taza que sigue ubicada en el mismo lugar donde comenzó :)

¹Este teorema es parte de la materia de cátedra y su demostración escapa del alcance del curso.

P2.- Demuestre que la ecuación

$$\sin(\cos(x)) = x$$

tiene al menos una solución en el intervalo $[0, 1]$.

Hint: Utilice lo que acaba de demostrar.

Derivadas y una pequeña muestra de lo que viene después

El objetivo de esta sección (aparte de proporcionar problemas de cálculo de derivadas) es dar una vaga, muy vaga, idea de en qué consiste el cálculo post-derivadas. Por supuesto, vamos a definir y hacer uso de unos cuantos elementos sin explicar el significado real que tienen ni por qué nos interesan en un principio. Las respuestas a esas preguntas corresponden a otros cursos de matemática.

P1.- Calcule la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = (3x^3 + 4x)^2$

(c) $f(x) = \cos^2(3x)$

(d) $f(x) = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$

(e) $f(x) = \cos(\cos(3 \sin(x^2)))$

(f) $f(x) = |x| \ (x \neq 0)$

(g) $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2x+1}+x}{\sqrt{\cos x+1}-x}}$

(h) $f(x) = \sqrt{\frac{x+\tan x}{x+\sec x}}$

(i) $f(x) = \sec(\tan(\cos(5x^2 + 4x)))$

P2.- Deduzca una fórmula para la n -ésima derivada de la función $\cos x$ (relacione su resultado con la penúltima pregunta de la Guía de Preparación P2).

P3.- (Integrales)

- (a) Encuentre una función cuya derivada sea la función constante igual a 1. ¿Es esta la única que existe?
- (b) Encuentre una función cuya derivada sea $2x$ ¿Existe alguna otra?
- (c) Generalicemos, encuentre una función f cuya derivada es x^n con n natural. Demuestre que si g es otra función que satisface esta misma condición, entonces existe una constante C tal que $f(x) - g(x) = C$ para todo x .

P4.- (Ecuaciones Diferenciales) Una ecuación diferencial la consideraremos simplemente como una ecuación que involucra derivadas de funciones (nuestra incógnita es una función y queremos que satisfaga la condición que nosotros le demos). Por ejemplo, la función $y = \tan x$ satisface la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$, la función $y = \cos(x)$ satisface $y'' = -y$ y la función $y = \sqrt{x}$ satisface $y' = \frac{1}{2y}$.

- (a) Considere la ecuación diferencial $y'' + y = 0$. Encuentre dos soluciones *simples* a esto y distintas de $y = 0$.
Hint: Piense "¿qué funciones cumplen con que al derivarlas dos veces me entregan su opuesto?"
- (b) Demuestre que si f y g son dos funciones que satisfacen esta ecuación, entonces $f + g$ también lo es.
- (c) Demuestre que si f satisface esta ecuación, entonces cf , para cualquier $c \in \mathbb{R}$ constante, también soluciona la ecuación.