Hay Infinitos Más Grandes que Otros

Un diálogo sobre funciones biyectivas y cardinalidad

Benja Vera

Junio 2019

Introducción

En este documento vamos a detallar la forma en que los matemáticos definen el concepto de cardinalidad y cómo esta definición, al ser extendida para conjuntos infinitos, provoca el resultado popularmente conocido como "Hay infinitos más grandes que otros". A grandes rasgos, lo que va a suceder es que vamos a partir con una definición intuitiva para cardinalidad (i.e. cantidad de elementos) y vamos a hacer un par de observaciones sobre ella. Luego, vamos a caracterizarla de una forma probablemente se te hará extraña utilizando funciones. Parecerá como si estuviéramos complicando las cosas a propósito, pero cuando hagamos el paso a conjuntos infinitos nuestra definición intuitiva se va a caer y esta caracterización va a sobrevivir. Por lo tanto, vamos a aceptarla como una nueva definición y probar ciertas propiedades de conjuntos infinitos. Eso, buen viaje!

Primeros Pasos: La definición más natural

"Sea n natural o 0. Un conjunto tiene cardinal n si cuando yo cuento sus elementos, me da n"

Esta quisiéramos que fuera nuestra definición de cardinalidad. Adicionalmente, si el conjunto fuera vacío, su cardinal lo definimos como 0 y listo. En primera instancia, vamos a trabajar con esta definición y deducir algunas propiedades a partir de ella.

Notación:

Denotaremos el cardinal de un conjunto A como $|A|$ (cabe destacar que como todos los conjuntos con los que vamos a trabajar por ahora son finitos y estamos trabajando con la definición de arriba, $|A|$ es un natural y siempre existe).

Podemos notar a primera vista las siguientes propiedades para conjuntos finitos:

(i) $A = B \implies |A| = |B|$

El recíproco, por supuesto, no se tiene. Pueden existir dos conjuntos distintos de igual cardinalidad.

(ii) $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$

(iii) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(iv) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

Demostrar formalmente estas propiedades no tendría ningún sentido matemático a estas alturas ya que solo hemos definido la cardinalidad a partir de una noción intuitiva. Por lo tanto, no hay nada en especial que demostrar.

Comencemos a generalizar

Ahora, hagamos algunas observaciones y analogías que nos servirán para comenzar a hablar de cardinalidad en términos de funciones. Lo que estamos a punto de ilustrar es el siguiente resultado:

"Un conjunto A tiene igual cardinal que B si existe $f : A \to B$ biyectiva."

En otras palabras, sus cardinales son iguales si podemos identificar a cada elemento de B con un y solo un elemento de A sin que nos quede ningún elemento de B suelto (la epiyectividad nos garantiza que a cada elemento en B le corresponde al menos un elemento en A y la inyectividad nos garantiza que ese elemento es efectivamente uno solo y no puede haber más.) Esto tiene sentido matemático, sin embargo puede ser pensado de forma más profunda. Cuando cuentas objetos con tus manos, lo que haces es asignar un dedo a cada objeto que estás contando. Por lo tanto estás (aunque probablemente no lo pienses así) armando una función biyectiva entre los dedos de tu mano y los objetos que estás contando.

Ampliemos esto. Ahora supongamos que identificamos a elementos de A con elementos de B mediante una función inyectiva. Sin embargo, agregamos nuevos elementos a B y por lo tanto nos quedan elementos sueltos. Como la función es inyectiva, no podemos tratar de alcanzar esos elementos por medio de mover flechas y tratar de hacerlos corresponder con algo (Porque si tratamos de alcanzar a b por medio de soltar a b', ahora nos queda b' sin preimagen. Puede que dibujar esto con diagramas de flechas te ayude). Entonces, si el cardinal de B es estrictamente mayor al de A, no puede haber una función epiyectiva $f : A \to B$. O recíprocamente:

"El cardinal de A es mayor o igual al de B si existe $f : A \to B$ epiyectiva"

Ahora, por último, volvamos al escenario en que teníamos A y B relacionados por una función biyectiva. Y supongamos que a B, en lugar de agregarle, le quitamos elementos. Entonces, tenemos flechas que no van a ningún lugar en B ¿Qué hacemos con eso? f tiene que estar bien definida a toda costa. Por lo tanto, no podemos dejar elementos de A sin imagen porque de lo contrario f ya no es función. Así que tenemos una única opción. Asignar a esos elementos una nueva imagen dentro de las que quedan. Es decir, **sacrificar la inyectividad de la función** f. Lamentable ¿no? Es decir, si el cardinal de B es menor al de A, no puede existir función inyectiva $f : A \to B$. O recíprocamente:

"El cardinal de A es menor o igual al de B si existe $f : A \to B$ inyectiva"

Todo esto puede ser difícil de razonar, probablemente porque pensar en términos de funciones no es tan natural como pensar en términos de "cantidad de elementos". Sin embargo esta idea de las funciones, aparte de ser una idea bastante novedosa y capaz de darle un nuevo sentido a palabras como inyectividad o epiyectividad, nos permite llegar mucho más lejos.

Una observación importante

Respecto de estas definiciones, notarás que no son definiciones que impliquen generalidad. Es decir, no estamos diciendo algo como "Toda función $f : A \to B$ es biyectiva" ni nada por el estilo. Y eso es porque, por ejemplo, aún si dos conjuntos tienen igual cardinalidad, podemos encontrar varias funciones que no son biyectivas entre ellos, y esto no es una contradicción. Todo lo que estamos diciendo es que *si existe* (¡Al menos una!) función biyectiva entre A y B, entonces ambos conjuntos poseen igual cardinalidad.

Salto de fé

Hagamos algo atrevido (Y un poco ilícito ya que aún no hemos definido cardinalidad en conjuntos infinitos). Probemos que los enteros tienen igual cardinalidad que los pares (que denotaremos como $2\mathbb{N}$). La forma en la que vamos a hacer esto es estableciendo una función $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ biyectiva, y luego una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ que también sea biyectiva. Luego, utilizando propiedades de funciones biyectivas podremos asegurar que la función $h = f \circ g^{-1}$ es también biyectiva. Asegurando así la igual cardinalidad entre los pares y los enteros.

La función f no es un problema. Si a cada natural debemos asignarle un par, entonces está claro que lo más natural sería $f(n) = 2n$. Probar que esto es biyectivo se extrae del hecho de que es lineal. $\square$

La función g, por otro lado, puede ser más desafiante. Nos imaginamos asignarle un número positivo a cada par y un número negativo a cada impar. Puede ser complejo formular matemáticamente una función así, pero luego de una división por casos, eventualmente resulta:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{si } n \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

Esto, si lo presentamos así como está sin explicación alguna, resulta como una especie de arte de magia que solo un matemático con años de experiencia podría sacar de su manga. Y comprobar que esto es efectivamente biyectivo es más oscurantista todavía. Pero el concepto es extremadamente sencillo. Imagina una dinámica donde tienes a un curso de niños de unos 7 años y quieres separarlo en dos grupos. Entonces les pides que hagan fila y vas alternando. Enviando a los pares hacia un lado y los impares hacia el otro. La notación (sobre todo tratándose de una función por partes) oscurece ese concepto, pero un dibujo puede aclararlo. Te aconsejo que te tomes el tiempo de hacerlo y con ello veas cómo trabaja esta función. Con esa intuición, la demostración de que es biyectiva debería ser incluso natural.

Entonces... hemos encontrado una función biyectiva que va entre los pares y los enteros. Luego... ¿Podemos decir que tienen igual cardinalidad? Esto, como bien diría un matemático, depende de qué definamos por cardinalidad. Y esta es una pregunta extremadamente delicada, sobre todo cuando tratamos con conjuntos infinitos. Ahora no podemos recurrir a nuestra definición antigua de contar elementos. Tendremos que adoptar una nueva, y tenemos una frente a nuestros ojos. Podemos esta vez **definir**[1] que dos conjuntos (finitos o infinitos) tendrán igual cardinalidad si existe función biyectiva entre ellos. Ahora ¿Tiene sentido esta definición? Bueno... en matemáticas, la calidad de una definición depende de si las propiedades que puedes extraer de ella tienen sentido y no provocan contradicciones. Veamos que esto es así con nuestra nueva definición. Pero antes, dos re-definicones adicionales que amplían lo que ya vimos en conjuntos finitos:

Definición: (Menor o igual cardinal)

"Diremos que $|A| \leq |B|$ si existe $f : A \to B$ inyectiva"

Definición: (Mayor o igual cardinal)

"Diremos que $|A| \geq |B|$ si existe $f : A \to B$ epiyectiva"

Recordemos. Ya habíamos establecido esto anteriormente para conjuntos finitos. Sin embargo ahora estamos convirtiéndolo en una definición y aprovechando su versatilidad para expandirlo al mundo de los conjuntos infinitos.

¿Qué significa esto para fines matemáticos? Significa que ahora si queremos probar que un conjunto A (arbitrario) tiene, por ejemplo, mayor o igual cardinal que otro conjunto B, lo que haremos es establecer una función de A en B y buscar que sea epiyectiva ¿Quieres ver un ejemplo? Veamos un ejemplo:

[1] No observar, definir

Ejemplos

Ejemplo 1:

Pruebe que $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$

Si estuviéramos trabajando bajo la noción de cardinalidad como cantidad de elementos, esto sería trivial. De hecho está listado como una de las propiedades del principio. Pero ahora queremos probarlo usando nuestra definición y de tal modo que también sea aplicable a conjuntos infinitos.

Demostración: Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$, queremos probar que existe $f : A \to B$ inyectiva. Tomando la función identidad $f(a) = a$ se tiene lo deseado. $\square$

Ejemplo 2:

Pruebe que $(|A| \leq |B|) \wedge (|B| \leq |C|) \implies |A| \leq |C|$

Demostración: El lado izquierdo nos dice que existen dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ ambas inyectivas. Entonces, queremos probar que existe $h : A \to C$ también inyectiva. Tomamos $h = g \circ f$ y siendo composición de dos funciones inyectivas, h también lo es. Sigue que $|A| \leq |C|$ $\square$

Ejemplo 3:

Pruebe que $|A| \leq |B| \implies |B| \geq |A|$

Demostración: Tenemos que existe función $f : A \to B$ inyectiva, y nos interesaría armar una función $g : B \to A$ epiyectiva (nuevamente, por si no fuera suficiente ya, te recomiendo hacer un esquema de esta situación y pensar en cómo armarías tal función)

Tenemos que f es una función epiyectiva. Es decir, todo elemento de A tiene imagen en B (porque de lo contrario, f ni siquiera sería función) y todo elemento de B, de tener preimagen, es única. Por supuesto que nadie nos garantiza que todo elemento de B tenga preimagen, aquello significaría que f es epiyectiva. Pero no sabemos si eso se cumple.

Bien, entonces la vida funciona bonitamente para los elementos de B que tienen preimagen, pero tenemos que trabajar por separado con quienes no. Separemos. Sea B_1 el conjunto de los $b \in B$ que tienen preimagen (Es decir... la imagen de f) y B_2 el conjunto de los $b \in B$ que **no** tienen preimagen[2]. Podemos restringir el codominio de f para que actúe sobre B_1. Luego, como sabíamos que era inyectiva y ahora además es epiyectiva puesto que la definimos sobre su imagen, dicha restricción que llamaremos f_1 pasa a ser biyectiva. Luego, tiene inversa. Dicha función f_1 va de B_1 en A y es epiyectiva. Sin embargo, no es la función que buscamos. Nosotros queríamos encontrar

[2]Nótese que $B_1 \cup B_2 = B$

una función que fuera de B en A. Por lo tanto, tendremos que extenderla para asignarle valores al conjunto B_2. ¡Pero ya tenemos la epiyectividad! Así que podemos rellenar como queramos y nuestra extensión será biyectiva (No será inyectiva eso sí, pero no inyectividad no es lo que buscamos). Es decir, sea a_0 un elemento arbitrario de A, fijo. Podemos por ejemplo definir la función $g : B \to A$ dada por:

$$g(b) = \begin{cases} f_1^{-1}(b) & \text{si } b \in B_1 \\ a_0 & \text{si } b \in B_2 \end{cases}$$

Con lo cual se tiene lo que buscábamos. $\square$

Ejercicio: Demuestra la implicancia recíproca. Es decir: $|B| \geq |A| \implies |A| \leq |B|$

Ejemplo 4: (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder)

El siguiente teorema no lo vamos a demostrar, solo vamos a enunciarlo y tratar de ilustrar por qué, aunque parezca tan trivial, es tan difícil de demostrar para conjuntos no necesariamente finitos. El teorema dice lo siguiente:

$$(|A| \leq |B|) \wedge (|B| \leq |A|) \implies |A| = |B|$$

Esto, desde el punto de vista de cantidad de elementos, donde estas desigualdades tienen un significado numérico, es completamente trivial. Sin embargo, lo que nos dice en general es que si existe una función inyectiva de A en B y otra función inyectiva de B en A, entonces podemos asegurar que existe función biyectiva de A en B. Dado lo que ya conocemos de funciones biyectivas, nuestro instinto nos dirá que no es trivial probar esto. Ya que la biyectividad de una función es una condición bastante fuerte desde el punto de vista matemático. Y de hecho, esta demostración es más que solo difícil. **Es imposible** demostrar esto a partir de los axiomas clásicos de Teoría de Conjuntos. La demostración es muy abstracta y requiere de un postulado llamado *Lema de Zorn*, que también es no-demostrable sin un axioma adicional (para más información, véase Axioma de Elección)

Ejercicios

(i) Demuestra que $|A| = |B| \implies |B| = |A|$

(ii) Demuestra que $(|A| = |B|) \wedge (|B| = |C|) \implies |A| = |C|$

(iii) Demuestra que $\left|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right| = |\mathbb{R}|$

Definiciones: (finito e infinito)

Notarás que las definiciones que hemos hecho en nuestro esfuerzo por formalizar la idea de cardinalidad solo han sido capaces de comparar conjuntos. Pero por ahora no hemos sido capaces de formalizar una frase como $|A| = 2$. Eso se arregla con facilidad:

"Sea n un número natural, diremos que un conjunto A tiene cardinalidad n si existe función biyectiva entre A y el conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Lo denotamos como $|A| = n$"

Esto, desde el punto de vista de un matemático, es **exactamente** lo mismo que la definición que habíamos puesto al inicio de este documento: La definición informal de cardinalidad. Puesto que asignar a cada elemento de A un número natural de forma biyectiva es esencialmente lo mismo que contar.

Adicionalmente, un conjunto A si dirá finito si existe n natural o 0 (en el caso del vacío) tal que $|A| = n$. En caso de no existir dicho n, diremos que A es un conjunto infinito. Ahora, solo para confirmar que las definiciones que hemos hecho tienen sentido, probemos el siguiente teorema:

"Todo conjunto finito tiene menor cardinalidad que todo conjunto infinito"

Es decir, para todo conjunto A finito y B infinito, existe una función $f : A \to B$ inyectiva.

Demostración: Vamos a ir construyendo la función elemento por elemento. Comenzamos por preguntarnos si hay elementos en A. De no haber, una función sin elementos en el dominio sería vacuamente inyectiva y por lo tanto $|A| \leq |B|$. Ahora, de haber elementos en A, tomemos uno de ellos, llamémosle a_1. Ahora, miremos a B y veamos si hay elementos ahí. Y debe haber, porque de lo contrario B sería vacío y su cardinal sería 0. Luego, B sería finito; cosa que es contradicción. Entonces, claramente existe al menos un $b_1 \in B$. Ahora, definamos $f(a_1) = b_1$. En otras palabras, escogemos un elemento de cada conjunto y los enlazamos. Ahora ¿Quedan elementos en A distintos de a_1? Si no, hemos construido una función inyectiva y el proceso termina. De lo contrario, tomemos uno y llamémosle a_2. Luego, miramos B. Si no le quedan elementos distintos de b_1, contradicción porque su cardinal sería 1 y por lo tanto sería finito. Entonces debe haber alguno, llamémosle b_2 y definamos $f(a_2) = b_2$. Si no quedan elementos en A, hemos terminado. Ya que la función f envía elementos distintos a imágenes distintas y por lo tanto es inyectiva. De lo contrario, el proceso continúa.

¿En algún punto se detendrá esto? ¡Por supuesto! Porque A es finito. Luego, $|A| = n$. Por lo tanto luego de retirar el elemento a_n y enlazarlo con un b_n, habremos creado una función inyectiva y por lo tanto $|A| \leq |B|$.

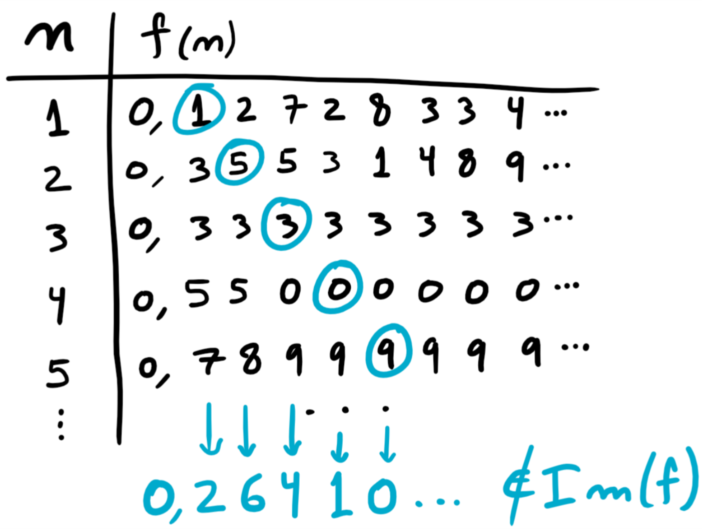
¡Más aún! B debe tener aún más elementos porque de lo contrario su cardinal sería n. Por lo tanto B tiene *estríctamente* mayor cardinal que A, con lo cual hemos terminado la demostración más densa de este documento. □

Hay infinitos (estrictamente) más grandes que otros

Finalmente, para terminar con este documento, vamos a demostrar que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Es decir, debemos ver que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ y luego probar que no puede existir función biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Lo primero es fácil puesto que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Por lo tanto, ya lo demostramos.

Nos basta ver que $|\mathbb{N}| < |]0,1[|$ y luego, como $]0,1[\subseteq \mathbb{R}$ se tendrá lo deseado. Supongamos una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to]0,1[$. Luego, cada natural tiene asignado un único número entre 0 y 1 (Imagina todos estos números en una especie de lista infinita) Y como todo número real tiene expansión decimal, podemos ver que todos estos números tienen una cierta (única) serie de dígitos en su parte decimal. Si logramos encontrar un número entre 0 y 1 que no esté en esta lista, hemos probado esencialmente que hay un elemento del codominio sin preimagen. Luego, f no sería epiyectiva, con lo cual habremos generado una contradicción ¿Pero cómo encontramos este número?

¡Simple! Vamos a armar el número según cada una de las posiciones de su parte decimal. En la primera posición debe no coincidir con $f(1)$, en la segunda no debe coincidir con $f(2)$, en la tercera no debe coincidir con $f(3)$ y así sucesivamente. Hemos creado un número entre 0 y 1 que difiere al menos en una parte decimal con cada uno de los números en la imagen de f. Luego, es distinto de todos ellos. Por lo tanto, f no es epiyectiva. Sigue que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es estríctamente mayor a la de $\mathbb{N}$. La siguiente imagen ilustra esto:



Para más información, puedes ver este artículo que entrega una forma semejante de explicar esta famosa demostración. □