

Funciones y ModelosA fin:P2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = ax + b$ / $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = cx + d$.pdq: $\exists c, f \in \mathbb{R}$ t.q. $(g \circ f)(x) = ex + f$.Dem: $(g \circ f)(x) = g(ax + b) = c(ax + b) + d$ $= (ac)x + (bc + d)$. Tomo $e = ac$ y $f = bc + d$ con lo cual se tiene lo pedido. $\square$.OBS: si imponemos $(g \circ f)$ cte, tenemos que $e = 0 = ac$, luego $(a = 0) \vee (c = 0)$. En otras palabras, alguna de las funciones debe ser constante. $\square$.P2) sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$).pdq: $\exists! x_0$ t.q. $f(x_0) = 0$.Dem: Existencia: notar que con $x_0 = \frac{-b}{a}$ (El cual siempre existe p.q. $a \neq 0$) se tiene que

$$f(x_0) = a\left(\frac{-b}{a}\right) + b = -b + b = 0.$$

unicidad: suponga $x_1 \neq x_2$ t.q. $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

$$\text{luego, } ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2}.$$

Luego, solo existe una solución. $\square$.(En otras palabras, las rectas
no ctes son inyectivas.)

Ahora sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = ax + b$ y
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = cx + d$ ($a \neq c$).

pdq: $\exists! x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x_0) = g(x_0)$.

Dem. mostrar que $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0$.

luego, defino $h = f - g$, de donde $h(x) = f(x) - g(x)$
 $= ax + b - cx + d = (a - c)x + (b + d)$. como $a \neq c$,
 $a - c \neq 0$. luego, h es una recta no nula.

$\therefore \exists! x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0) = g(x_0) \quad \square$

Cuadrático:

P1 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 5$.

(i) $\min(f) = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-b) = \frac{1}{2}b^2 + b^2 + 5 = 5 - \frac{b^2}{2}$

(ii) s: quiero el mayor posible, $\boxed{b=0}$. (porque
a 5 le estoy restando un cuadrado)

P2 sea x = la medida de un lado, luego la medida del
otro es $x + \pi$. x satisface $x(x + \pi) = M$.

$\Rightarrow x^2 + \pi x - M = 0$.

(i) $M = 56$, $\pi = 1 \Rightarrow x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 8) = 0$

Dimensiones, $\boxed{7, 8}$

(ii) $\Delta = \pi^2 + 4M$, esto es siempre positivo! $\therefore$ La construcción
siempre existe $\square$.

P3) $C(t) = -t^2 + 20t + 70$

(3)

(i) vértice, $\frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-1)} = 10$ ∴ como $a = -1 < 0$,

C crece antes de 10 y decrece después de 10.

∴ en $t = 7$ está aumentando!

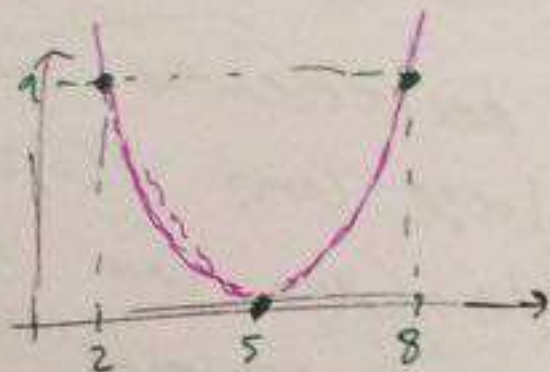
(ii) máximo, $C(\frac{-b}{2a}) = C(10) = -100 + 200 + 70$

$= 170$ (mil millones). ¡Nunca excede este

número! La humanidad no está perdida. ~~☹~~ ☺

P4) ~~digamos~~ veamos!

notar que como $f(2) = f(8)$,
el vértice debe estar
entre 2 y 8, ie, en 5.



∴ f tiene la forma $f(x) = a(x-5)^2 + 0$

para determinar a , evalúo en 2:

$$f(2) = a(2-5)^2 + 0 = q \Leftrightarrow 9a = q \Leftrightarrow \boxed{a=1}$$

$$\therefore \boxed{f(x) = (x-5)^2}$$

hiperbólico

P1) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x} = -\frac{2x-1}{x-3} = -2\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x-3}\right) = -2\left(\frac{x-3}{x-3} + \frac{5/2}{x-3}\right)$

$$= -2 - \frac{5}{x-3}$$

P₂ (i)



(4)

$$C(m) = \frac{2\pi}{\alpha(m)} = \frac{2\pi \cdot m}{\pi(m-2)} = \frac{2m}{m-2}$$

(ii). $C(3) = \frac{6}{1} = 6 \in \mathbb{Z}$. $C(6) = \frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{Z}$

$C(4) = \frac{8}{2} = 4 \in \mathbb{Z}$. $C(5) = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$.

(iii) forma canónica: $C(m) = 2\left(\frac{m}{m-2}\right) = 2\left(\frac{m-2}{m-2} + \frac{2}{m-2}\right)$

decreciente con asíntota $C=2$.
 $= 2 + \frac{4}{m-2}$
 luego, como $C(6)=3$ todos los valores de $C(m)$ con $m \geq 6$ deben pertenecer al intervalo $]2, 3[$, luego ninguna otra solución es entera $\square$

Bijectividad e Inversas

P₂ f auto inversa $\Leftrightarrow (f \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$.

(i) $x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{f} x = f(f(x))$

f debe ser su propia inversa $\hookrightarrow$ debe ser simétrica c/r a la recta $y = x$.

(ii) contra ejemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$.
 (Impar $\Rightarrow$ A.I.)

contra ejemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x=2 \\ 2 & \text{si } x=3 \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}$
 (A.I $\Rightarrow$ Impar)

$$(iii) f(x) = 2 + \frac{4}{x-2}$$

(5)

$$(f \circ f)(x) = 2 + \frac{4}{2 + \frac{4}{x-2} - 2} = 2 + \frac{4}{\frac{4}{x-2}} = 2 + x - 2 = x$$

sirve cualquier función de la forma $f(x) = A + \frac{B}{x-A}$

P2 (i) $P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

pda: P par.

Dem: $P(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = P(x)$ $\square$

(ii) $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

pda: i impar

Dem: $i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$ $\square$

(iii) $(P+i)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

$= \frac{2f(x)}{2} = f(x) \quad \square$

Comrs: sea $f(x)$ par e impar. luego, $f(-x) = f(x)$ $(\forall x \in \text{dom } f)$
 $\cdot f(-x) = -f(x)$

$\therefore f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

luego, supongamos que una función posee dos descomposiciones

$f = P_1 + i_1 = P_2 + i_2 \Leftrightarrow \underbrace{P_1 - P_2}_{\text{par}} = \underbrace{i_2 - i_1}_{\text{impar}}$

como la única función par e impar es 0, se tiene que
 $P_1 - P_2 = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
 $i_2 - i_1 = 0 \Leftrightarrow i_1 = i_2$ $\square$

P2) (a.i) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ / $g(x) = \frac{1}{x} + 2$ (6)

impuesto $\forall x \in \text{Dom}(g)$:

$$g(x) = (f \circ h)(x) \Leftrightarrow g(x) = f(h(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + 2 = 2(h(x) - 3)^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x} - \frac{3}{2} = (h(x) - 3)^2 \Leftrightarrow h(x) - 3 = \sqrt{\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = 3 + \sqrt{\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}}$$

(toma la raíz positiva p. q. de este modo $\text{Im}(h) = [3, \infty) = \text{Dom}(f)$)

Restringiendo:
 $\frac{1}{2x} - \frac{3}{2} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{3}{x}$

$$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{3}]$$

(a.ii) sean f, g, h invertibles t. q.:

$$g = f \circ h$$

$$(f^{-1})$$

existencia de inversos.

$$\Leftrightarrow f^{-1} \circ g = f^{-1} \circ (f \circ h)$$

asoc.

$$\Leftrightarrow f^{-1} \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ h$$

inversos.

$$\Leftrightarrow f^{-1} \circ g = I \circ h$$

neutro

$$\Leftrightarrow \boxed{f^{-1} \circ g = h} \quad \square$$

(a.iii) es análogo a la P2 de Modelo Afín.

$$f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [\sqrt{2}, \infty[\quad \text{por} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\sin(x) + 1}}$$

(i) sea ~~$f_1(x)$~~ $f_1:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow]-1, 1]$ por

$$f_1(x) = \sin(x)$$

• $f_2:]-1, 1] \rightarrow]0, 2]$ por

$$f_2(x) = x + 1$$

• $f_3:]0, 2] \rightarrow]0, \sqrt{2}]$ por

$$f_3(x) = \sqrt{x}$$

• $f_4:]0, \sqrt{2}] \rightarrow [\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty[$ por

$$f_4(x) = \frac{1}{x}$$

• $f_5: [\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty[\rightarrow [\sqrt{2}, \infty[$ por

$$f_5(x) = 2x$$

• $f = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)$

(ii) pdq: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (8)

Dem: veamos que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I$.

em efecto: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$

$= f^{-1} \circ I \circ f = f^{-1} \circ f = I$.

*↪ inversos
mutuos*

como $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I$, sigue que

$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} \quad \square$

(iii) luego, $f^{-1} = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)^{-1}$
 $= f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1} \circ f_5^{-1}$

Pero: $f_1^{-1}:]-1, 1] \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ por

$f_1^{-1}(x) = \arcsen(x)$

$f_2^{-1}:]0, 2] \rightarrow]-1, 1]$ por

$f_2^{-1}(x) = x-1$

$f_3^{-1}:]0, \sqrt{2}] \rightarrow]0, 2]$ por

$f_3^{-1}(x) = x^2$

• $f_4^{-1}: [\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty[\rightarrow]0, \sqrt{2}]$ por

$$f_4^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

• $f_5^{-1}: [\sqrt{2}, \infty[\rightarrow [\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty[$ por

$$f_5^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$$

Ahora, componiendo las inversas de cada parte, obtengo que:

$$f^{-1}(x) = \arcsen\left(\left(\frac{1}{x/2}\right)^2 - 1\right) //$$

Donde $f^{-1}: [\sqrt{2}, \infty[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Trigonometría

P3 (i) $|\sen(3x)| = \frac{1}{2}$

① $\sen(3x) = \frac{-1}{2}$

1.1) $3x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$

1.2) $3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow x_2 = \frac{7\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$

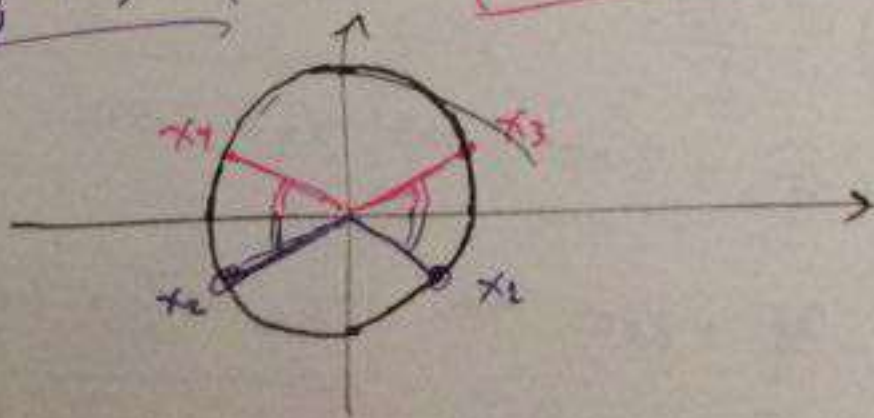
② $\sen(3x) = \frac{1}{2}$

2.1) $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x_3 = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$

2.2) $3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x_4 = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$



$$(ii) \cos(x) + \sin(x) = 1$$

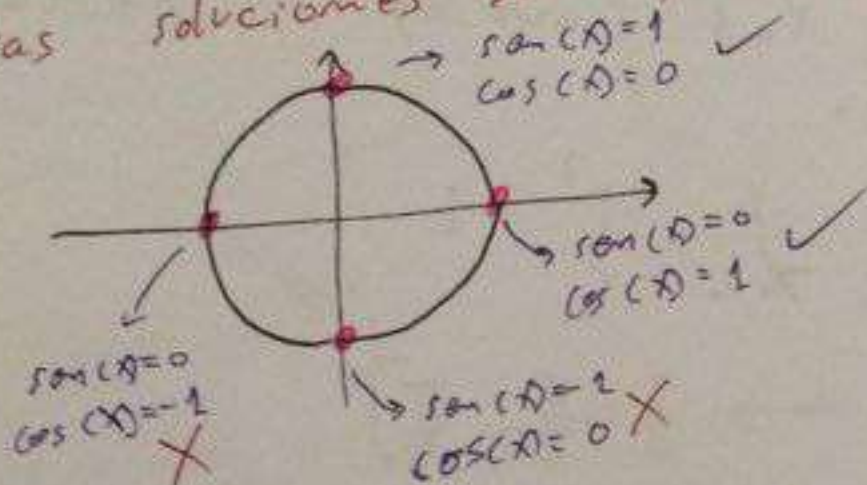
10

forma 1: (Elevar al cuadrado)

$$\cos^2(x) + \underbrace{2\sin(x)\cos(x)}_{\sin(2x)} + \sin^2(x) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{k}{2}\pi}$$

Advertencia: como elevamos al cuadrado, algunas de estas soluciones son falsas!



Solo sirven:

$$\begin{cases} x_1 = 2k\pi \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

forma 2: (Magia del lado oscuro de la fuerza D:)

$$\cos(x) + \sin(x) = 1 \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x+p) = \sin(x)\cos(p) + \cos(x)\sin(p)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 2k\pi}$$

$$x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

P₂ | $f(t) = -4 \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$

11

$$= -4 \sin\left(\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) + 1$$

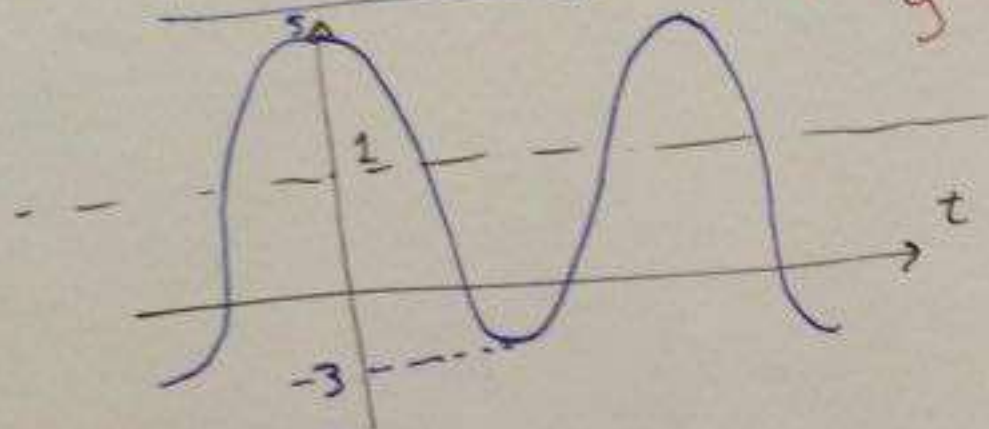
$$| \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$= 4 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$= 4 \cos(t) + 1$$

coseno de amplitud 4
y eje horizontal 1.



P₃ | $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

• notar que si n es múltiplo de 4 ($n=4k$), entonces,

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{4k\pi}{2}\right) = \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

• por otro lado, si es par sin ser múltiplo de 4 ($n=4k+2$),

entonces,

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{4k\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}\right) = \cos(x + \pi + 2k\pi)$$

$$= \cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

quedan los casos $n=4k+1$ y $n=4k+3$.

$n=4k+1$ | $\cos\left(x + \frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

$n=4k+3$ | $\cos\left(x + \frac{(4k+3)\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(x)$

Em resumo:

(12)

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos(x) & n = 4k \\ -\sin(x) & n = 4k+1 \\ -\cos(x) & n = 4k+2 \\ \sin(x) & n = 4k+3 \end{cases}$$