Guía de Preparación P2

Benja Vera

Junio 2019

Funciones y Modelos

Modelo Afín

P1.- Demuestre que la composición de dos funciones afines es afín. ¿Existe forma de que una composición de dos funciones afines no constantes resulte en una función que sí es constante?

P2.- Demuestre que toda recta no constante debe cortar al eje x en un único punto. Luego, utilice esto para demostrar que todas las rectas de distinta pendiente tienen una única intersección. (Nota: Demostrar la unicidad puede ser más difícil. Para esto, suponga que existiera otra solución distinta y llegue a una contradicción)

Modelo Cuadrático

P1.- Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 5$. Recuerde que como el coeficiente que multiplica a x^2 es un número positivo, la función posee un valor mínimo.

(i) Encuentre este valor mínimo (va a quedar en términos de la constante b)

(ii) Encuentre el valor de b para que el valor mínimo encontrado en la parte anterior sea el mayor posible.

P2.- Se desea construir un rectángulo de área M donde un lado sea k unidades más largo que el otro. Cabe señalar que k y M son valores positivos cualesquiera.

(i) Determine las dimensiones del rectángulo para $M = 56$ y $k = 1$.

(ii) Demuestre que esta construcción siempre es posible sin importar los valores de k y M.

P3.- (Música épica de fondo...)

Mes de Noviembre, año 2024. El futuro de la humanidad pendía de un hilo. Los humanos, alguna vez una especie majestuosa, eran ahora brutalmente depredados por un tipo de bacteria que ellos mismos ayudaron a crear. Y ahora producto de ello se encontraban replegados en el único lugar que aún quedaba libre de infección: lo que alguna vez había sido Siberia.

Ahí, la doctora Alice Wells tenía el fundamental cargo de preveer el futuro de la infección para poder advertir al gobierno de las amenazas que se encontraban por delante. Bajo cuidadosos análisis llevados a cabo por los mejores científicos que aún sobrevivían, se determinó que la población de bacteria en el continente (medida en miles de millones) a lo largo del tiempo (medido en meses) estaba modelada mediante la función:

$$C(t) = -t^2 + 20t + 70$$

Donde $t = 0$ corresponde al momento en que la humanidad había tenido que huir a Siberia, de lo cual hacían ya 7 meses.

(i) Determine si la población de bacteria en el momento actual (es decir, en $t = 7$) está creciendo o disminuyendo.

(ii) Una importante investigación concluye que si la población alguna vez alcanza más allá de los doscientos mil millones de bacterias, entonces inevitablemente se propagará sobre Siberia y el último refugio estará perdido. ¿Hay esperanza? Justifique como si el futuro de la raza humana dependiera de ello.

P4.- Encuentre la ecuación canónica de una parábola tal que pase por los puntos $(2, 9)$, $(8, 9)$ y $(5, 0)$.

Modelo Hiperbólico

P1.- Encuentre la forma canónica de la función $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3 - x}$$

Utilizando esto, analícela completamente.

P2.- (basado en hechos reales) Sea n un número natural mayor que 2. Recuerde que por un argumento geométrico bastante sencillo, la expresión para la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados viene dada por $S(n) = \pi(n-2)$. Más aún, ya que el polígono es regular podemos deducir que el valor de cada uno de los ángulos interiores es $\alpha(n) = \frac{S(n)}{n} = \frac{\pi(n-2)}{n}$. Con esto en mente, vamos a resolver el siguiente problema:

Primavera de 2017. Benjamín entra desesperado al auditorio de bachillerato justo a la hora de término de una cátedra de Matemáticas 2G dictada por Alejandro. Luego de la clásica ola de preguntas propia del final de cada cátedra, Benjamín se acerca al profesor y le plantea su duda: "¡Profe! Necesito ayuda con la demostración de que el triángulo, el cuadrado y el hexágono son los únicos polígonos regulares que pueden teselar el plano". Ante esto, Alejandro dice: "Pero Beeeenja, todo lo que tienes que hacer es..."

(i) Suponer un plano teselado por polígonos regulares de n lados, tomar un vértice arbitrario y expresar la cantidad $C(n)$ de regiones en las que el espacio queda dividido por la teselación. Te podrás convencer de que esto obedece la fórmula $C(n) = \frac{2\pi}{\alpha(n)}$

(ii) Luego, considerando las restricciones de este modelo, diremos que un polígono de n lados tesela el plano si y solo si la expresión $C(n)$ es un número entero. Comprueba que los valores $n = 3, 4, 6$ son soluciones de este problema pero 5 no lo es.

(iii) Finalmente, analizando la monotonía y asíntotas de la expresión $C(n)$, concluye que no pueden existir soluciones para $n > 6$.

Biyectividad e Inversas

P1.- Una función biyectiva $f : A \to A$ se dice *autoinversa* si $f^{-1} = f$, o equivalentemente, si $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$.

(i) Encuentre una condición geométrica sobre el gráfico de una función para que esta sea autoinversa. En base a esto, encuentre al menos tres ejemplos de funciones autoinversas.

(ii) ¿Es cierto que todas las funciones impares son autoinversas? ¿Es cierto que todas las funciones autoinversas son impares?

(iii) Pruebe que la función $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ dada por $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ es autoinversa. En base a esto, determine condiciones para que una función hiperbólica sea autoinversa (Consejo, use forma canónica)

P2.- (Un teorema bonito) Sea f una función arbitraria definida sobre todos los reales.

(i) Consideremos $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Demuestre que p es una función par.

(ii) Consideremos $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Demuestre que i es una función impar.

(iii) Verifique que $f = p+i$. Esto demuestra que toda función sobre $\mathbb{R}$ puede ser descompuesta como la suma entre una función par y una función impar.

Bonus: Demuestre que esta descomposición es única. Es decir, no puede haber otra. (Hint: Demuestre antes que $f(x) = 0$ es la única función par e impar a la vez)

P3.- (Un poco de álgebra de funciones) Matemáticamente hablando, el conjunto de las funciones biyectivas sobre $\mathbb{R}$ cumple propiedades interesantes respecto de la composición. Estas propiedades son encapsuladas por los matemáticos bajo el nombre de *Grupo* y son las siguientes:

(a) **(cerradura)** Si f y g son biyectivas, $f \circ g$ también lo es.

(b) **(asociatividad)** $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

(c) **(existencia de neutro)** Existe una función invertible[1] I tal que $I \circ f = f \circ I = f$. A dicha función le llamamos la *función identidad* y viene dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) **(existencia de inversos)** Toda función invertible f posee una otra función invertible f^{-1} que satisface $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$.

Una de las propiedades importantes de los Grupos es que las propiedades que tienen nos permiten resolver ecuaciones en ellos.

(a.i) Considere la función $f : [3, \infty[\to [5, \infty[$ dada por $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ y la función $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ por $g(x) = \frac{1}{x} + 2$. Encuentre una función h tal que $g = f \circ h$.

(a.ii) Demuestre que en general para f, g y h funciones invertibles se tiene que

$$g = f \circ h \iff f^{-1} \circ g = h$$

Señale bien qué propiedades de grupos de las que se señalan anteriormente está utilizando en su demostración (debería necesitarlas todas)

(a.iii) **Bonus:** Demuestre que esta solución es única. Esto prueba que no existe otra solución a la ecuación funcional resuelta en (a.i)

Lo que estamos a punto de hacer ahora consiste en encontrar la inversa de una función complicada por medio de descomponerla en partes y trabajar con ellas. Consideremos la función $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [\sqrt{2}, \infty[$ dada por

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\sin(x) + 1}}$$

(i) Exprese la función f como una composición de varias partes biyectivas (cuantas más mejor) tales que la composición de todas ellas sea f.

(ii) Demuestre por propiedades de grupos que para f, g funciones biyectivas se tiene que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(iii) Utilice su resultado de (ii) para encontrar la inversa de f.

[1] Invertible = biyectiva

Trigonometría

P1.- Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$|\sin(3x)| = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) + \sin(x) = 1$$

P2.- Grafique la siguiente función sinusoidal:

$$f(t) = -4\sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$$

Consejo: Utilice identidades trigonométricas para reducir su función a algo más simple de graficar

P3.- Sea n un natural, deduzca una identidad para $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

P4.- A través de jugar un poco con identidades trigonométricas que usted conozca, deduzca una nueva y envíesela como ejercicio a su ayudante (Consejo, tenga piedad y asegúrese de que su identidad sea cierta)