

Ajudam tra 9 (Bijectividad e inversas)

P1 $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{8\}$ por $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^3$

a) determine $\text{Im}(f)$

sea y en $\mathbb{R} \setminus \{8\}$, queremos ver los valores posibles para y bajo la ecuación $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \frac{2x-1}{x-1} \rightarrow \text{aplique mos forma canónica sobre esto.}$$

forma canónica:

$$\frac{2x-1}{x-1} = 2 \frac{x-\frac{1}{2}}{x-1} = 2 \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

obs: $f(x)$ queda expresada como $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)^3$

temramos:

$$\sqrt[3]{y} = 2 + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} - 2 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{\sqrt[3]{y}-2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y}-2}}$$

única restricción para y :

$$\sqrt[3]{y} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} \neq 2 \Leftrightarrow \boxed{y \neq 8}$$

$$\therefore \boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{8\}}$$

NOTA IMPORTANTE: recuerda que las raíces de índice impar no tienen varias soluciones en $\mathbb{R}$. solo una (que siempre existe de hecho) i.e. se comportan distinto a las cuadráticas.

b) Demuestre que f es inyectiva y epyectiva.

Imy | sean x_1 y $x_2 \in \text{Dom}(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$
(p.d.q: $x_1 = x_2$)

dem: en efecto, $f(x_1) = f(x_2)$ (de f $f(x)$)
 $\Leftrightarrow \left(2 + \frac{1}{x_1 - 1}\right)^3 = \left(2 + \frac{1}{x_2 - 1}\right)^3$ ↓ uso canónica!

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1 - 1} = 2 + \frac{1}{x_2 - 1} \quad | -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1} \quad | ()^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2} \quad \therefore f \text{ inyectiva.}$$

Nota: observaráis que todos nuestros pasos son de la forma $\Leftrightarrow$. Es decir, no solo hemos demostrado que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ sino también el recíproco $(x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$ sin embargo, esa otra implicación es obvia. Si dos números son el mismo DEBEN tener la misma imagen porque f es función.

conclusión: Las demostraciones de inyectividad siempre serán reversibles. //

epi (sí, la imagen es igual al codominio, pero esta vez lo haré de manera formal)

Definición formal de epyectividad:

$f: A \rightarrow B$ epi: si $(\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b)$

"para cualquier elemento en el codominio..."

"puedo encontrar al quien en el dominio..."

"...que lo genere..." bajo f .

Dem: sea $y \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$ arbitrario y tomemos

$x = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y} - 2} \rightarrow$ lo tomo del cálculo de la imagen.

necesito probar dos cosas:

i) $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

ii) $f(x) = y$.

i) x es claramente real puesto que $y \neq 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} \neq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} - 2 \neq 0$. Para ver que es distinto de

$\frac{1}{\sqrt[3]{y} - 2} \neq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y} - 2} \neq 1$

nos basta con ver que $\sqrt[3]{y} - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ $\circ \circ \circ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} = \text{dom}(f)$.

ii) $f(x) = \left(2 + \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y} - 2}}_x - 1} \right)^3 = \left(2 + \frac{1}{\sqrt[3]{y} - 2} \right)^3 = (2 + \sqrt[3]{y} - 2)^3$

$= (\sqrt[3]{y})^3 = y \quad \square \quad \circ \circ \circ f \text{ epyectiva.}$

c) determine f^{-1}

como f biyectiva, tiene inversa y podemos definir $f^{-1}(x)$ directamente del cálculo de la Imagen.

$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{8\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ por

$$f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

habría que demostrar que:

i) $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$

ii) $(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in \text{cod}(f)$

i) sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}\left(\left(2 + \frac{1}{x-1}\right)^3\right) \quad (x \neq 1)$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\left(2 + \frac{1}{x-1}\right)^3} - 2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x-1} - 2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}} = 1 + x - 1 = x$$

ii) sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$, $(f \circ f^{-1})(x) = f\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}\right)$

$$= \left(2 + \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}}_{f^{-1}(x)} - 1}\right)^3 = \left(2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}\right)^3 = \left(2 + \sqrt[3]{x} - 2\right)^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

f^{-1} inversa de f

Pz ^{a)} Demuestre que f estr. crec. o estr. decrec. es iny.

(tomemos este caso (el otro es análogo))

Dem: notar que la definición de inyectividad

se puede escribir de forma equivalente como:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

por lo tanto vamos a probar esto.

sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tales que

$x_1 \neq x_2$, luego necesariamente $x_1 < x_2$ o $x_1 > x_2$.

Tomemos $x_1 < x_2$ sin pérdida de generalidad.

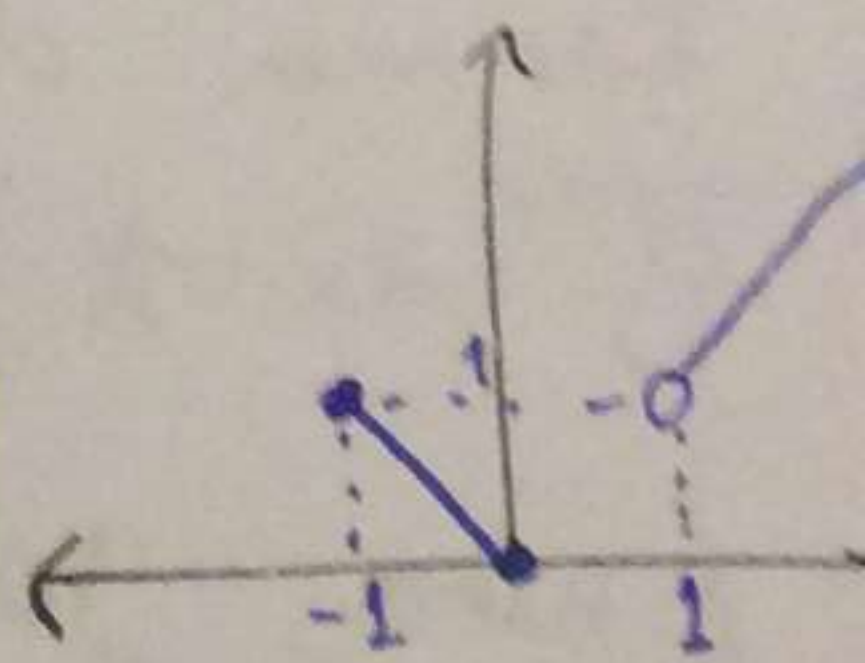
luego, como f estrictamente creciente, $f(x_1) < f(x_2)$.

en particular, $f(x_1) \neq f(x_2)$ $\square$ i.e. f inyectiva.

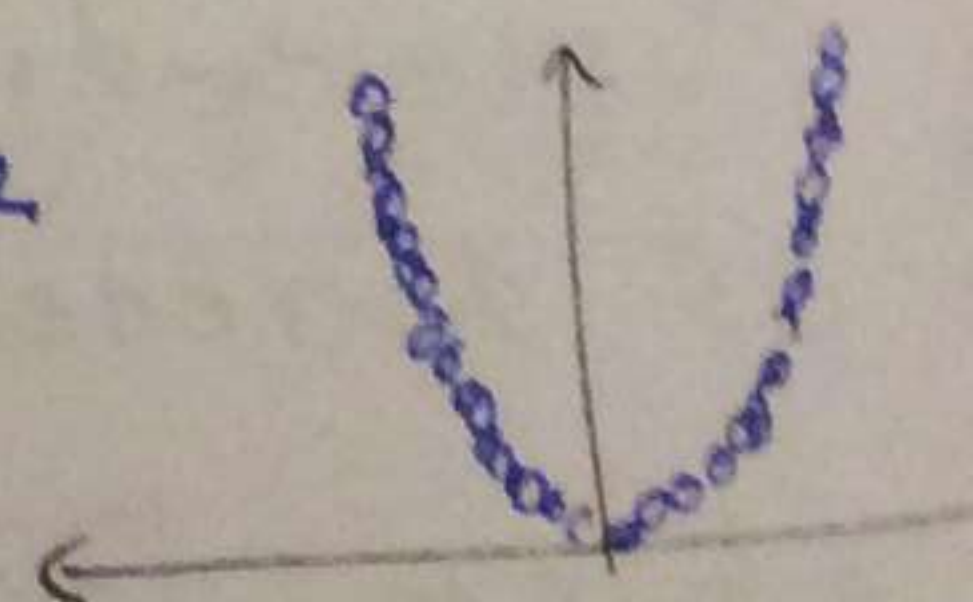
b) de un caso de función inyectiva no monótona.

Demos varios!

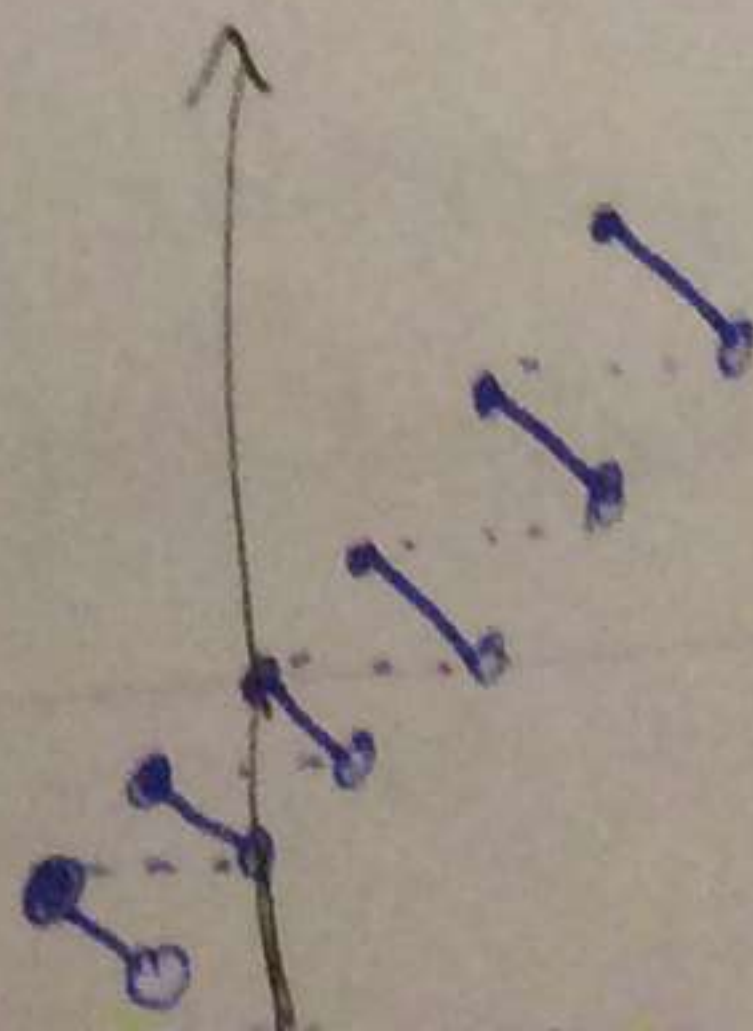
i) $f: [-1, 0] \cup]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ por $f(x) = |x|$



ii) $f: (\mathbb{R}^- \cap \mathbb{I}) \cup (\mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ por $f(x) = x^2$



iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = 2\lfloor x \rfloor - x$



c) ¿es cierto que f invertible y creciente
 $\Rightarrow f^{-1}$ creciente?

A través de jugar un poco con los gráficos de funciones inversas, podríamos convencernos de que efectivamente esto es así. ¿pero cómo lo demostramos?

Vamos a hacer una dem. por contradicción.

dem. supongamos que existiera f invertible y creciente tal que f^{-1} es decreciente. Y sean

$x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tales que $x_1 < x_2$. Como f creciente, tenemos que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Definamos $y_1 = f(x_1)$ / $y_2 = f(x_2)$, como f invertible, podemos garantizar que $f^{-1}(y_1) = x_1$ y $f^{-1}(y_2) = x_2$.

(notación: si f no fuera invertible no tendríamos forma de garantizar que podemos devolvernos de y a x)

Ahora, ya que ~~estamos~~ tenemos $y_1 \leq y_2$ y estamos suponiendo (para intenciones de contradicción) que f^{-1} es decreciente, entonces $y_1 \leq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

o bien, $x_1 \geq x_2$. Contradicción $\star$. Luego, no existe

f invertible y creciente con f^{-1} decreciente. En otras palabras, f invertible y creciente $\Rightarrow f^{-1}$ creciente.



d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ y $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = \sqrt{x}$
¿es g la inversa de f ?

no, y hay varias formas de verlo.

i) en general, cuando f va de A en B , f^{-1} va de B en A . y ahora no es el caso.

ii) $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$, pero $-1 \in \text{cod}(f)$. luego, f no biyectiva $\Rightarrow$ no invertible.

(un argumento parecido se puede usar para g)

iii) $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x \therefore g \circ f \neq \text{id}$.

P3) ~~a)~~ $N(t) = 800 - \frac{750}{t+1} \quad (t \geq 0)$

a) notar que $\frac{750}{t+1} \neq 0 \Leftrightarrow 800 - \frac{750}{t+1} \neq 800 \Leftrightarrow N(t) \neq 800$.

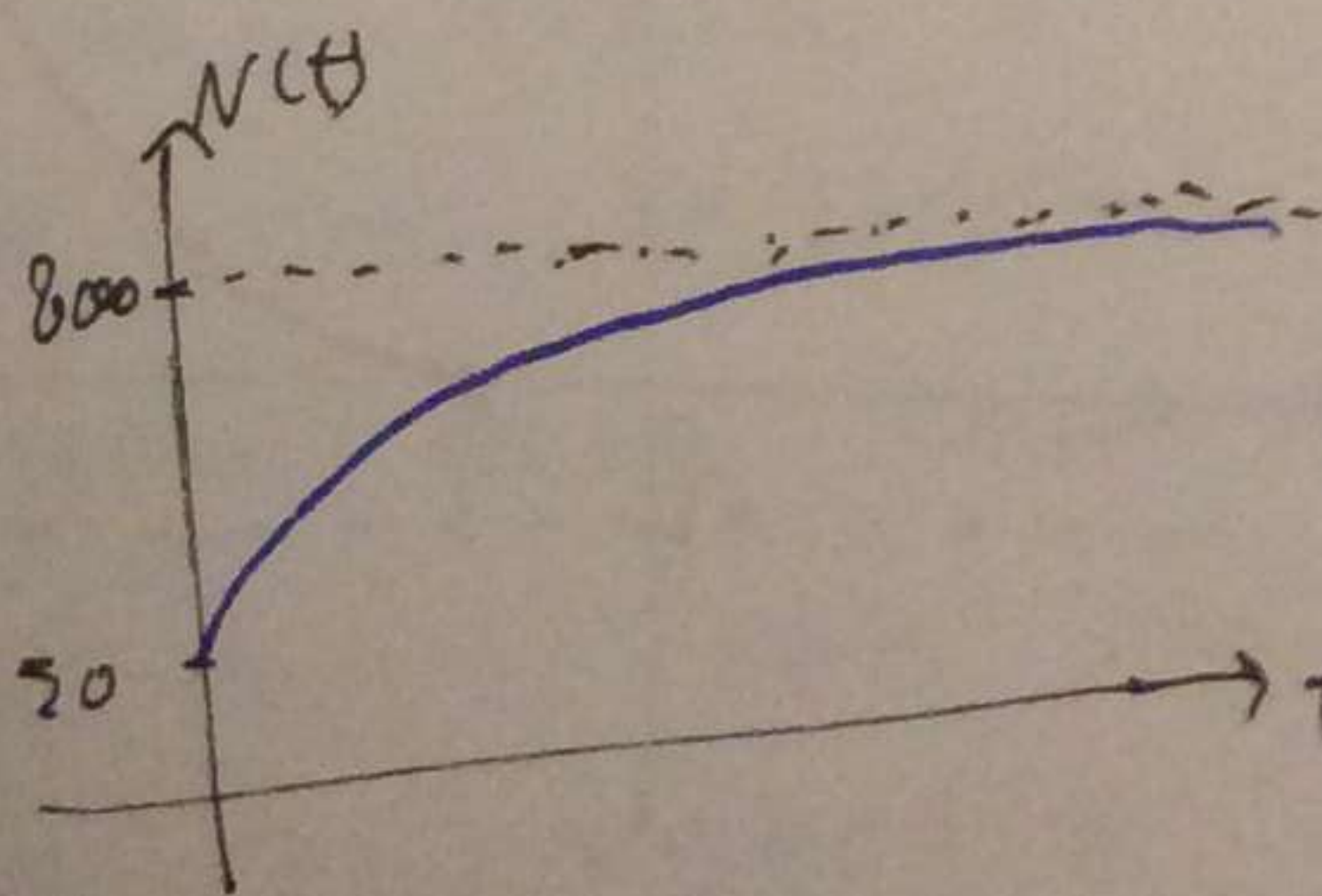
también notamos que en forma canónica, $N(t) = 800 + \frac{-750}{t+1}$

$N(t) = 800 + \frac{-750}{t+1}$ y como $-750 \leq 0$, N creciente.

la población crece sin alcanzar 800 $\Rightarrow \boxed{N(t) \leq 800}$

b) Asintotas, $N(t) = 800$, $t \neq -1$. N creciente.

$\rightarrow N(0) = 800 - 750 = 50$



~~Im(N) = [50, 800]~~

$\therefore \text{Im}(N) = [50, 800]$

c) ¿es $N: [0, \infty[\rightarrow [50, 800[$ por $N(t) = 800 - \frac{750}{t+1}$ biyectiva?

→ nota: es epiyectiva porque la definimos sobre su imagen.
queda por ver que es inyectiva.

~~Dem: sea $t_1, t_2 \in [0, \infty[$ t.q. $N(t_1) = N(t_2)$~~

Dem: sean t_1 y $t_2 \in [0, \infty[$ t.q. $N(t_1) = N(t_2)$

$$\text{luego. } 800 - \frac{750}{t_1+1} = 800 - \frac{750}{t_2+1} \quad | -800$$

$$-\frac{750}{t_1+1} = -\frac{750}{t_2+1} \quad | \cdot \frac{-1}{750}$$

$$\frac{1}{t_1+1} = \frac{1}{t_2+1} \quad | ()^{-1}$$

$$t_1+1 = t_2+1 \quad | -1$$

$$\boxed{t_1 = t_2} \Rightarrow N(t) \text{ inyectiva.}$$

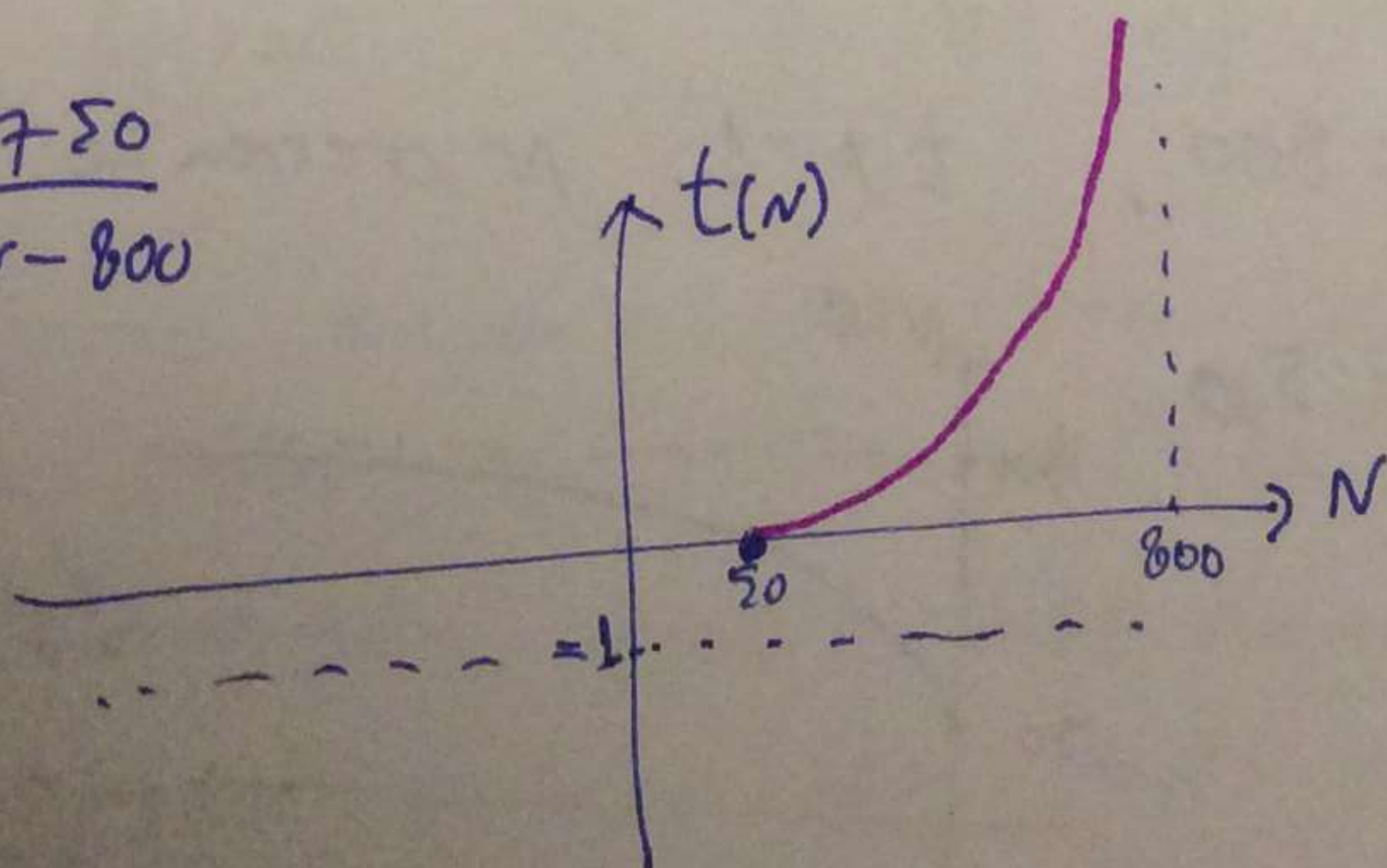
sigue que N es biyectiva.

d) Modele $t(N)$. $N \in [50, 800[$

$$N = 800 - \frac{750}{t+1} \Leftrightarrow 800 - N = \frac{750}{t+1} \Leftrightarrow t+1 = \frac{750}{800-N}$$

$$\Leftrightarrow t(N) = -1 - \frac{750}{N-800}$$

$$\rightarrow t(50) = 0$$



P4 $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(s) = s + \frac{1}{s}$

a) determine $\text{Im}(f)$

$$f(s) = s + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 1}{s}$$

ADVERTENCIA: ¡no hay forma canónica para esto! $\triangleright$:

buscamos el conjunto de valores y para los cuales la ecuación $y = f(s)$ tiene solución.

$$y = f(s) \Leftrightarrow y = \frac{s^2 + 1}{s} \Leftrightarrow ys = s^2 + 1 \Leftrightarrow \underline{s^2 - ys + 1 = 0}$$

esto es cuadrático. Tendrá solución si $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow \underline{y \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[}$$

$$\text{luego, } \text{Im}(f) =]-\infty, 2] \cup [2, \infty[$$

b) ¿Es f inyectiva o eyectiva?

epi Como $\text{Im}(f) \neq \text{cod}(f)$, sabemos que f no va a ser eyectiva, nos basta con encontrar un valor que no esté en $\text{Im}(f)$ y ver que no tiene preimagen.

tomemos $\boxed{y = 0}$. Si impongo $f(s) = y = 0$,

$$\text{tengo } s + \frac{1}{s} = 0 \Leftrightarrow \frac{s^2 + 1}{s} = 0 \Leftrightarrow s^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{s^2 = -1}$$

$\nexists s \in \text{Dom}(f)$ t.q. $f(s) = 0$. $\Leftrightarrow$ f no eyectiva.

Imy

el que nos hayamos encontrado una cuadrática en el cálculo de la imagen sugiere la existencia de más de una preimagen para cada elemento del codominio

Bastaría encontrar un punto con más de una preimagen para ver que f no es inyectiva.

Tomemos por ejemplo $y=3$.

$$f(s) = 3 \Leftrightarrow s + \frac{1}{s} = 3 \Leftrightarrow \frac{s^2 + 1}{s} = 3 \Leftrightarrow s^2 + 1 = 3s$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 3s + 1 = 0 \quad / \quad \Delta = 9 - 4 = 5 \quad \left| s = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right|.$$

$$\text{luego, } f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 3, \text{ pero } \frac{3+\sqrt{5}}{2} \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

luego, f no inyectiva

sea $g:]-1, 0[\cup [1, +\infty[\rightarrow]-\infty, -2) \cup [2, \infty[$ por

$$g(s) = s + \frac{1}{s}. \text{ Pruebe que } g \text{ biyectiva y}$$

calcule g^{-1} .

im y) sean s_1 y $s_2 \in]-1, 0[\cup [1, \infty[$ t. q. $g(s_1) = g(s_2)$

$$\text{luego, } s_1 + \frac{1}{s_1} = s_2 + \frac{1}{s_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s_1^2 + 1}{s_1} = \frac{s_2^2 + 1}{s_2} \Leftrightarrow s_1^2 s_2 + s_2 = s_2^2 s_1 + s_1$$

$$\Leftrightarrow s_1^2 s_2 - s_2^2 s_1 + s_2 - s_1 = 0 \Leftrightarrow s_1 s_2 (s_1 - s_2) + (s_2 - s_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s_2 - s_1) (1 - s_1 s_2) = 0$$

↪ en el dominio en el que estamos esto nunca es 0!

∴ $s_2 - s_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{s_1 = s_2}$. Sigue que g inyectiva.

Sea $y \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$, queremos encontrar $s \in [-1, 0[\cup [1, \infty[$ t.q. $g(s) = y$

no mirar

$$y = \frac{s^2+1}{s} \Leftrightarrow s^2 - sy + 1 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Sabemos que $|y| \geq 2$, luego, la raíz existe
 $\boxed{s \in \mathbb{R}}$

¿me quedo con la positiva o la negativa?

quiero que s pertenezca a $[-1, 0[\cup [1, \infty[$

si $y \leq -2$, veamos a dónde pertenece la solución negativa.

$$s = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{2} \geq 0 \leq -1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{no me} \\ \text{sirve} \end{array} \right)$$

$\hookrightarrow \leq -1$

probemos la sol. positiva.

$$s = \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{2} \geq 0$$

$\hookrightarrow \leq -1$

probemos que es menor que 0.

$$\frac{\sqrt{y^2 - 4}}{2} \leq \frac{\sqrt{y^2}}{2} = \frac{|y|}{2}$$

luego, $\frac{y}{2} + \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{2} \leq \frac{y}{2} + \frac{|y|}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{s < 0}$

porque y negativo.

¿a un número menor o igual a -1 le estoy sumando algo positivo. ¿es eso suficiente para que el número s cargue entre -1 y 0?

Probar que es mayor o igual a -1 nos va a costar (mucho). Más que nada porque tenemos que hacer que el decrecimiento de la expresión $\frac{y}{2}$ (cuando y se hace negativo) se compensa con el crecimiento de $\frac{\sqrt{y^2-4}}{2}$ de modo que quedemos en $[-1, 0[$.

idea básica:

$$S = \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{y^2-4}}{2} \geq \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{y^2}-\sqrt{4}}{2} = \frac{y}{2} + \frac{|y|}{2} - \frac{2}{2} = -1$$

(porque y negativo)

$$\text{p.e. } \boxed{S \geq -1}$$

pero... es cierto que $\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a}-\sqrt{b}$?
veamos! tratemos de probarlo. ($a, b \geq 0$)

$$\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad | ()^2 \rightarrow \text{asumo } a-b \text{ positivo por que eso se cumple en nuestro problema.}$$

$$\Leftrightarrow a-b \geq (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow a-b \geq a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow -2b \geq -2\sqrt{a}\sqrt{b} \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{b \geq \sqrt{a}\sqrt{b}}$$

en nuestro caso: ($a=y^2, b=4$)

$$4 \geq \sqrt{y^2}\sqrt{4} \Leftrightarrow 4 \geq |y| \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq |y| \quad \checkmark \text{ se cumple! } \quad \text{''}$$

luego, $S = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2} \in [-1, 0[$.

Si esto se cumple, podemos usar la propiedad y nuestra idea sirve.

¿En qué estábamos? 0.0 $\rightarrow \text{cod}(g)$

• para $y \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$, queríamos encontrar ~~esta~~ $s \in [-1, 0[\cup [1, \infty[$ tal que $g(s) = y$

• A través de un cálculo corto, obtuvimos $s = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$, $\hookrightarrow \text{dom}(g)$

pero queríamos que s perteneciera al dominio de g para que nuestra dem. de epiyectividad tuviera sentido. Y la solución negativa no nos servía.

• luego, con algunos trucos algebraicos probamos que la sol. positiva sí pertenece a $[-1, 0[$

(con $y \in]-\infty, -2]$ porque estamos analizando por mitades el codominio). Es decir, nuestro candidato a s pertenece a $\text{dom}(g)$.

queda por ver que:

$$1) \quad g\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right) = y$$

$\rightarrow$ voy a omitir esto porque es solo álgebra.

2) en la otra mitad del codominio ($[2, \infty[$)

también podemos encontrar $s \in \del{[1, \infty[}$ $\text{dom}(g)$ tal que $g(s) = y$.

$$2) \text{ sea } y \geq 2 \text{ y } s = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

→ pruebo la positiva.

luego, como $y \geq 2$ y $\sqrt{y^2 - 4} \geq 0$, tengo que

$$s \geq 1, \quad s \in [1, \infty[\Rightarrow s \in \text{Dom}(g)$$

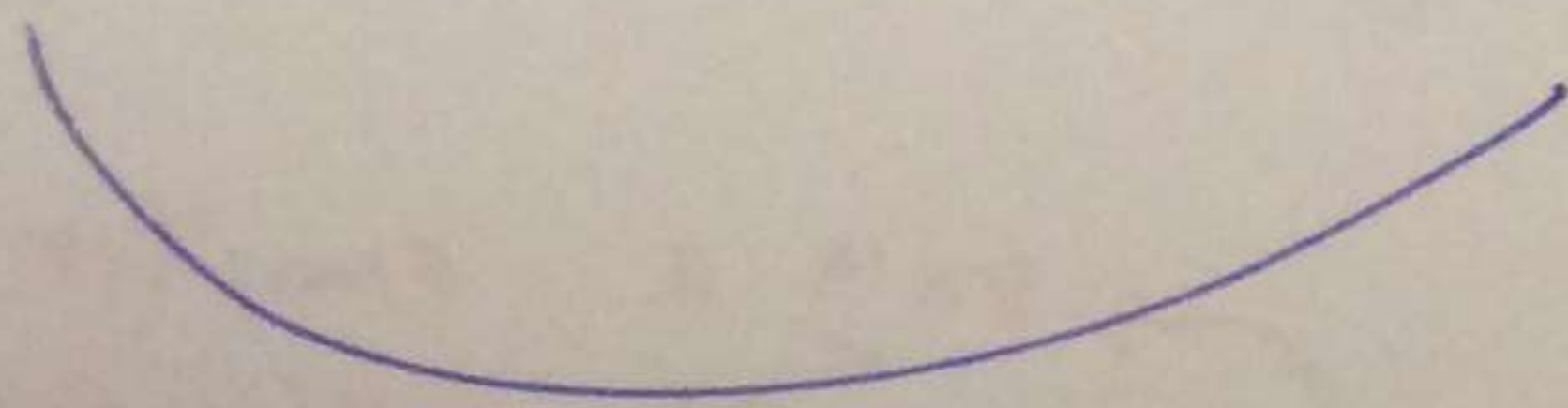
por ver que (es análogo a (1))

$$g(s) = y$$

∴ g epyectiva.

⇒ g biyectiva 

||



o que les vaya bacán en
la PZ!

Saludos,

- BNV