

Prueba Parcial 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 20 Mayo, 2017

Tiempo : 120 minutos .

Nombre:

Sección:

Si tiene celular, este debe permanecer apagado.

1	2	3	4	5	<i>Puntaje</i>	<i>Nota</i>

JUSTIFIQUE CADA UNO DE SUS RESULTADOS.

De los cinco problemas, elija cuatro de ellos para responder.

1. a) El casino de una Universidad para preparar un endulzante, utiliza un contenedor con capacidad de 1000 litros. El contenedor inicialmente tiene 45 litros de agua pura. Para preparar el endulzante se ingresan 20 litros por minuto de una solución la que contiene 20 gramos de azúcar por cada litro. Modele la concentración de azúcar que hay en el contenedor en cualquier instante t .

Solución:

Sea

$c(t)$: concentración de azúcar que hay en el contenedor ($\frac{gr}{lt}$) en el instante t (*seg*)

$x(t)$: cantidad de azúcar (*gr*) que hay en el contenedor en el instante t

$v(t)$: volumen total de solución (*lt*) que hay en el contenedor en el instante t .

entonces $c(t) = \frac{x(t)}{v(t)}$,

1.0 punto.

en el cual $x(t) = 400t$, $v(t) = 45 + 20t$.

0.5 punto.

Reemplazando,

$$c(t) = \frac{400t}{45 + 20t} = \frac{80t}{9 + 4t}$$

0.5 punto.

Para saber la variación de t (dominio de c) hay que tener en cuenta que $0 \leq v(t) \leq 1000$

$$\begin{aligned} 0 \leq v(t) \leq 1000 &\Leftrightarrow 0 \leq 45 + 20t \leq 1000 \\ &\Leftrightarrow 45 \leq 20t \leq 955 \\ &\Leftrightarrow \frac{45}{20} \leq t \leq \frac{955}{20} \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq t \leq \frac{191}{4} \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$, $t \in [0, \frac{191}{4}]$

0.5 punto.

La concentración de azúcar en el contenedor queda modelada por la función $c(t) = \frac{80t}{9+4t}$, $t \in [0, \frac{191}{4}]$.

0.5 punto.

- b) Esbozar el gráfico de la siguiente función, utilizando la forma canónica de ésta e indicando de que manera sus parámetros inciden en la forma del gráfico.

$$f : [1, +\infty[- \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}.$$

Solución:

Cálculo de la forma canónica:

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6} = \frac{\frac{2}{3}(3x-6) + 3}{3x-6} = \frac{2}{3} + \frac{3}{3x-6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{x-2}$$

$$\text{luego } f(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{x-2}.$$

0.5 punto.

Como $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{x-2}$, sus parámetros son $k = 1$, $h = 2$, $M = \frac{2}{3}$.

0.5 punto.

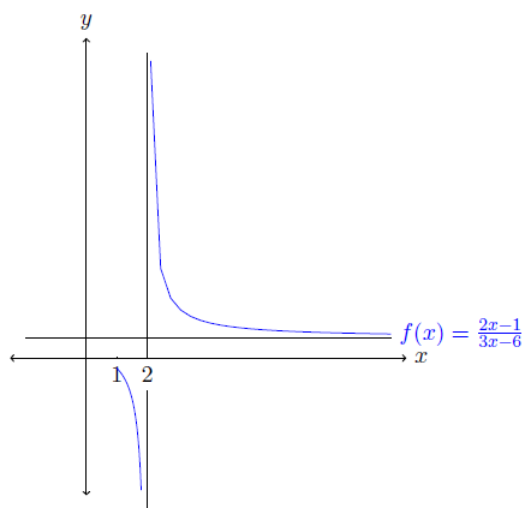
$k > 0$ implica que f es decreciente en el conjunto $] - \infty, 2[$ y en $]2, \infty[$, además f es cóncava hacia abajo en $] - \infty, 2[$ y cóncava hacia arriba en $]2, +\infty[$.

1.0 punto.

f tiene dominio $[1, +\infty[- \{2\}$ y recorrido $] - \infty, -\frac{1}{3}] \cup]\frac{2}{3}, +\infty[$.

0.5 punto.

La gráfica de f es:



0.5 punto.

Nombre:

Sección:

2. Sean $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$.

- a) Determine los $x \in \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$.
- b) Demuestre que $f \circ g$ es decreciente en $]2, +\infty[$.

Solución:

a) [**Forma 1**] Primero, debemos determinar para qué $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(x) \in \mathbb{R}$ y $g(x) \in \mathbb{R}$. Para esto, observemos que:

- 1) Para $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, tenemos que la única restricción es $x - 1 \neq 0$.
Por ende, $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- 2) Para $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$, tenemos que la restricción esta dada por el argumento de la raíz, lo que nos dice que $x - 2 \geq 0$. Luego, $g(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in [2, +\infty[$.
- 3) Vemos que conjunto forman los elementos $g(x)$, para $x \in [2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} 2 &\leq x, \\ 0 &\leq x - 2, \\ 0 &\leq \sqrt{x - 2}, \\ 1 &\leq \sqrt{x - 2} + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(x) \in [1, +\infty[$.

1.5 punto.

Teniendo en consideración lo anterior, debemos determinar para qué valores de $x \in [2, +\infty[$, tenemos que $g(x) \in \mathbb{R} - \{1\}$. Para esto, notamos que el único valor que no es posible es cuando $g(x) = 1$.

1.0 punto.

Por lo tanto, determinando tal valor, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 \\ \sqrt{x-2} + 1 &= 1 \\ \sqrt{x-2} &= 0 \\ \Rightarrow x &= 2. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, si $x \in]2, +\infty[$.

0.5 punto.

[Forma 2]Primero, debemos determinar para qué $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(x) \in \mathbb{R}$ y $g(x) \in \mathbb{R}$. Para esto, observemos que:

- 1) Para $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, tenemos que la única restricción es $x-1 \neq 0$.
Por ende, $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- 2) Para $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$, tenemos que la restricción esta dada por el argumento de la raíz, lo que nos dice que $x-2 \geq 0$. Luego, $g(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in [2, +\infty[$.

1.0 punto.

Ahora, procedemos a determinar $(f \circ g)(x)$. Para esto, notemos que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &:= f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) \\ &= \frac{1}{[(\sqrt{x-2} + 1) - 1]^2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x-2})^2} \\ &= \frac{1}{x-2}\end{aligned}$$

con lo que concluimos que $x \neq 2$.

1.0 punto.

Como además tenemos que $2 \leq x$, tenemos que $x > 2$. Por lo tanto, $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, si $x \in]2, +\infty[$.

1.0 punto.

- b) Para desarrollar lo pedido, consideremos $x, y \in]2, +\infty[$, tales que $x < y$. Debemos concluir que $(f \circ g)(y) < (f \circ g)(x)$.

1.0 punto.

Luego,

$$\begin{aligned}2 &< x < y \\ 0 &< x-2 < y-2 \\ \Rightarrow 0 &< \frac{1}{y-2} < \frac{1}{x-2} \\ \Rightarrow 0 &< (f \circ g)(y) < (f \circ g)(x).\end{aligned}$$

1.5 punto.

Con lo que concluimos que $f \circ g$ es decreciente en $]2, +\infty[$.

0.5 punto.

Nombre:

Sección:

3. Sea $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, 1[$ con $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$. Demuestre que f es biyectiva.

Solución:

Primero veamos que f es sobreyectiva:

Para ello, calculemos la imagen de f , a saber:

$$Im(f) = \{y \in [0, 1[: \text{ existe } x \in [1, +\infty[\text{ tal que } f(x) = y\}$$

En otras palabras, necesitamos encontrar un $x \geq 1$ tal que $\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = y$; con $y \in [0, 1[$.

1 punto.

De esta ecuación despejemos x , haciendo las siguientes observaciones:

Notemos que, $y \geq 0$

Además, $y^2 = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 - 1 = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 1 - y^2 = \frac{1}{x^2} > 0$

Por tanto, $y \geq 0$ y $1 - y^2 > 0$

Además, $x^2(1 - y^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1 - y^2}$

Luego, para $y \geq 0$ y $(y^2 < 1 \Leftrightarrow |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1)$

Tenemos que: $|x| = \sqrt{\frac{1}{1 - y^2}}$

Por tanto, para $y \geq 0$ y $-1 < y < 1$ es decir, para $0 \leq y < 1$ podemos resolver la ecuación $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$ cuya solución es $x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - y^2}}$

Como $Dom(f) = [1, +\infty[$, entonces para $0 \leq y < 1$ sólo nos quedamos con la solución $x = \sqrt{\frac{1}{1 - y^2}}$

1 punto.

Notar finalmente que, $0 \leq y < 1 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 < 1 \Rightarrow 1 - y^2 > 0$

Y que, $-y^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < 1 - y^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - y^2} \geq 1$

De donde: $x = \sqrt{\frac{1}{1 - y^2}} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

Luego $Im(f) = [0, 1[$ Se sigue que f es sobreyectiva.

1 punto.

Veamos ahora que f es inyectiva:

Sean $a, b \geq 1$:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} \\ &\Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ porque } a \text{ y } b \text{ son positivos.} \end{aligned}$$

2 puntos.

Se sigue que f es una función inyectiva. (Notar que en realidad la inyectividad es inmediata en la demostración anterior, dado que para cada $y \in Im(f)$ existe único $x \in Dom(f)$ que satisface $y = f(x)$)

Hemos probado que f es inyectiva y sobreyectiva. Luego f es biyectiva.

1 punto.

Nombre:

Sección:

4. Sea $u = tg(x)$, demuestre que $cosec(2x) = \frac{1+u^2}{2u}$ y que $sec(2x) = \frac{1+u^2}{1-u^2}$.

Solución:

Primero demostraremos que $cosec(2x) = \frac{1+u^2}{2u}$

Como $u = tg(x)$ y $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ entonces

$$\frac{1+u^2}{2u} = \frac{1+tg^2(x)}{2tg(x)} = \frac{1+\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}}{2\frac{sen(x)}{cos(x)}} =$$

1.0 punto.

$$\frac{cos(x) \left(1 + \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}\right)}{2sen(x)} = \frac{cos(x) \left(\frac{cos^2(x)+sen^2(x)}{cos^2(x)}\right)}{2sen(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{2sen(x)cos(x)} =$$

0.5 punto.

$$= \frac{1}{2sen(x)cos(x)} = \frac{1}{sen(2x)} = cosec(2x)$$

1.5 punto.

Ahora demostremos que $sec(2x) = \frac{1+u^2}{1-u^2}$

$$\frac{1+u^2}{1-u^2} = \frac{1+tg^2(x)}{1-tg^2(x)} = \frac{1+\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}}{1-\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}}$$

1.0 punto.

$$= \left(\frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)}\right) \left(\frac{cos^2(x)}{cos^2(x) - sen^2(x)}\right) =$$

0.5 punto.

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{1}{\cos(2x)} =$$

1.5 punto.

Nombre:

Sección:

5. El desplazamiento de una partícula viene modelada por $s : [0, 1.5] \rightarrow \mathbb{R}$ con $s(t) = 10 + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t)$, donde s se mide en centímetros y t se mide en segundos.

- a) Determine los instantes en que el desplazamiento de la partícula es de 10.25 centímetros.

Solución:

Se debe determinar los $t \in [0, 1.5]$ tal que $s(t) = 10.25$.

En efecto: $s(t) = 10.25 \Leftrightarrow 10 + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t) = 10.25 \Leftrightarrow \text{sen}(2\pi t) = \frac{1}{2}$

1 punto.

$$\Leftrightarrow 2\pi t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

0.5 punto.

$$\text{o } 2\pi t = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

0.5 punto.

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{12} + k \text{ o } t = \frac{5}{12} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

0.5 punto.

Como $t \in [0, 1.5]$ se tiene que los valores de t que satisfacen la ecuación son: $t = \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1\frac{1}{12}, 1\frac{5}{12}$ [seg].

0.5 punto.

- b) Esbozar el gráfico de s justificando através de sus parámetros.

Solución:

dado que s es una función sinusoidal, donde : $s(t) = 10 + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t) = D + A \text{sen}(Bt + C)$, con $D = 10$, $A = \frac{1}{2}$, $B = 2\pi$, $C = 0$.

De esta manera los parámetros fundamentales para esbozar el gráfico de s son:

1. Periodo: $\frac{2\pi}{|B|} = 1$.

2. Amplitud: $|A| = \frac{1}{2}$

3. D. fase: $-\frac{C}{B} = 0$.
4. Valor medio: $y = D = 10$

0.5 puntos cada uno.

Luego la representación gráfica de s nos queda:

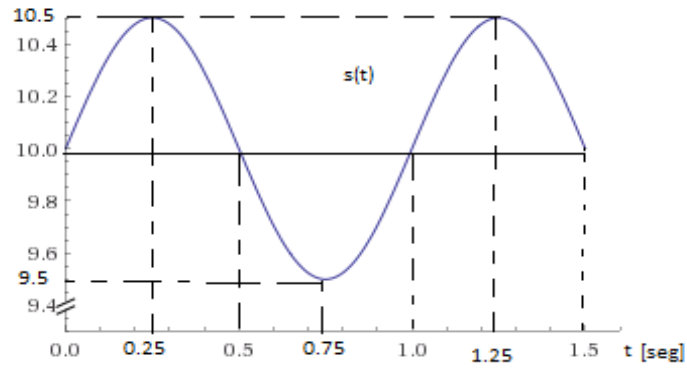


Figura 1: Representación gráfica de s .

1 punto.