

P.1 variables: c : cantidad agregada en litros.

$V(c)$: Volumen total en función de la cantidad vertida

$A(c)$: Volumen de alcohol en función de la cantidad vertida.

OBS:

$$V(c) = 5 + c$$

$$A(c) = \underbrace{0,35 \cdot 5}_{\substack{35\% \text{ de} \\ \text{lo que} \\ \text{había}}} + \underbrace{0,05 \cdot c}_{\substack{5\% \text{ de lo} \\ \text{que agregamos}}}$$

a) modelemos la concentración

$$C(c) = \frac{A(c)}{V(c)} = \frac{0,05c + 1,75}{c + 5}$$

b) condición: buco c^* tal que

↗ reducida en un 10%

$$(i) \quad C(c^*) = 0,9 C(0) \Leftrightarrow \frac{0,05c^* + 1,75}{c^* + 5} = 0,9 \cdot 0,35$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,05c^* + 1,75}{c^* + 5} = 0,315 \Leftrightarrow 0,05c^* + 1,75 = 0,315c^* + 5 \cdot 0,315$$

$$\Leftrightarrow 0,175 = 0,265c^* \Leftrightarrow \boxed{c^* = \frac{35}{53}}$$

$$(ii) \quad C(c^*) = 0,7 C(0) \Leftrightarrow \frac{0,05c^* + 1,75}{c^* + 5} = 0,245$$

$$\Leftrightarrow C^*(0,245 - 0,05) = 1,75 - 5 \cdot 0,245$$

$$\Leftrightarrow C^* = \frac{0,525}{0,195} = \frac{105}{39} = \underline{\underline{\frac{35}{13}}}$$

c) notamos que si queremos que la concentración disminuya, debemos agregar más cantidad. Queremos obtener a qué concentración podemos llegar.

hagamos magia (forma canónica)

$$C(c) = \frac{0,05C + 1,75}{C + 5} = 0,05 \left(\frac{C + 35}{C + 5} \right)$$

$$= 0,05 \left(\frac{\cancel{C+5}^1}{\cancel{C+5}} + \frac{30}{C+5} \right) = \boxed{0,05 + \frac{1,5^{\oplus}}{C+5}}$$

$\oplus$ este término desaparece cuando C crece.

$\circ \circ$ la concentración límite es $0,05$.

porcentaje: $\frac{0,05}{C(0)} = \frac{0,05}{0,35} = \frac{1}{7}$

d) ahora $c(t) = \frac{t}{2}$ y queremos $C(t)$
 pero $C(c) = \frac{0,05c + 1,75}{c + 5}$ / reemplazando $c = \frac{t}{2}$,

$$C(t) = \frac{0,05 \frac{t}{2} + 1,75}{\frac{t}{2} + 5}$$

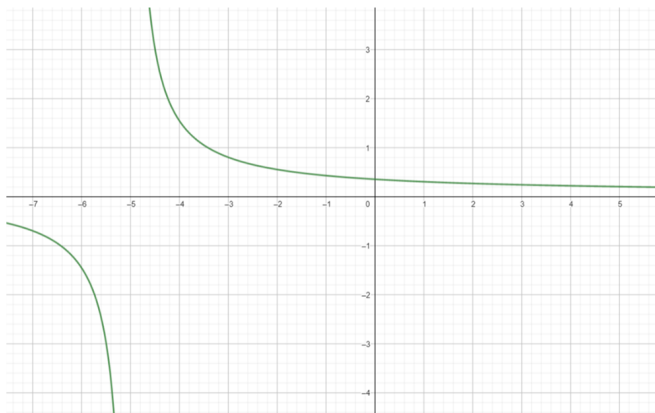
e) impongo $C(c) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{0,05c + 1,75}{c + 5} = 0,2$

$\Leftrightarrow 0,05c + 1,75 = 0,2c + 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{0,75}{0,15} = 5}$

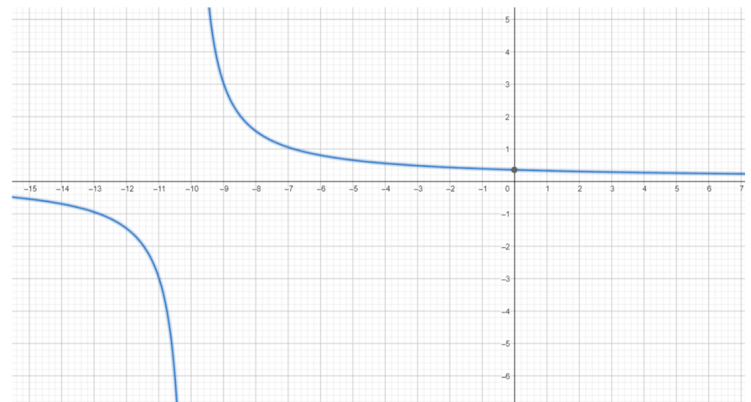
como $C(t) = \frac{t}{2}$, $5 = \frac{t}{2} \Leftrightarrow \boxed{t = 10}$

f)

$C(c)$



$C(t)$



Nota: en nuestro problema, ambas funciones solo están definidas para $c, t \geq 0$.

P_2	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$h: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$
	$f(x) = 5 - x$	$g(x) = 2 - x$	$h(x) = -\frac{4}{x-1}$

$$a) (f+h)(x) = 5 - x - \frac{4}{x-1} = \frac{(5-x)(x-1)-4}{x-1} = \frac{-x^2+6x-9}{x-1}$$

$$= \frac{-(x-3)^2}{x-1} \quad (-)$$

$$i) (f+h)(x) = 0 \quad \text{si} \quad \boxed{x=3}$$

$$ii) (f+h)(x) > 0 \quad \text{si} \quad x-1 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 1}$$

$$iii) (f+h)(x) < 0 \quad \text{en cualquier otro caso}$$

$$\boxed{x \in]1, \infty[- \{3\}}$$

$$b) \left(\frac{f}{g}\right)(x): \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

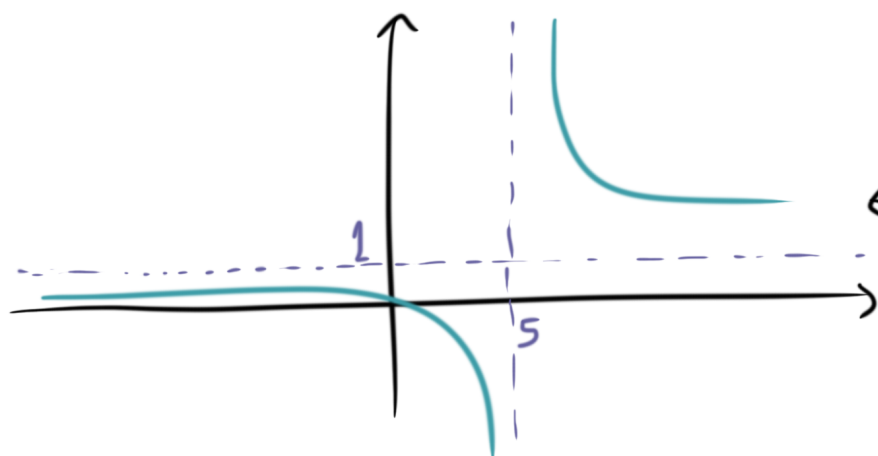
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2-x}{5-x}$$

forma canónica:

$$\frac{2-x}{5-x} = \frac{x-2}{x-5} =$$

$$\frac{x-5+3}{x-5} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{3}{x-5}$$

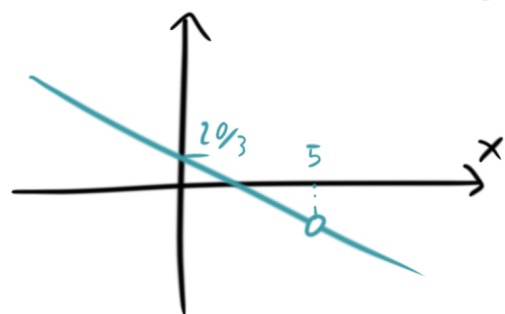
$$= 1 + \frac{3}{x-5} \quad \rightarrow \text{decreciente}$$



$$I_m\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$c) h \circ \frac{f}{g} = h\left(\frac{f}{g}\right) = h\left(1 + \frac{3}{x-5}\right)$$

$$= -\frac{4}{\cancel{1} + \frac{3}{x-5} - \cancel{1}} = -4 \cdot \frac{x-5}{3} = \frac{-4}{3}x + \frac{20}{3}$$



lineal!
(decreciente)

$$d) (h \circ g)_{(x)} = \frac{-4}{2-x-1} = \frac{-4}{1-x} = \frac{4}{x-1}$$

como $4 > 0$, $h \circ g$ decreciente en $] -\infty, 1[\cup] 1, \infty[$

P₃ | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x^2}}$

$$a) f(-x) = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+(-x)^2}} = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x^2}} = f(x)$$

$\downarrow$
 $(-x)^2 = x^2$

como $f(-x) = f(x)$, f par $\square$

b) sean $x_1, x_2 \in [0, \infty[$ t.q. $x_1 < x_2$

luego: $0 \leq x_1 < x_2$ / $()^2$

$$\Rightarrow 0 \leq x_1^2 < x_2^2$$
/ $+2$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2 + x_1^2 < 2 + x_2^2$$
/ $()^{-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+x_1^2} > \frac{1}{2+x_2^2}$$
/ $\cdot 18$

$$\Leftrightarrow 9 \geq \frac{18}{2+x_1^2} > \frac{18}{2+x_2^2} \quad / \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow -9 \leq -\frac{18}{2+x_1^2} < -\frac{18}{2+x_2^2} \quad / +1$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq 1 - \frac{18}{2+x_1^2} < 1 - \frac{18}{2+x_2^2} \quad / \sqrt[3]{}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x_1^2}} < \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x_2^2}} \quad / \text{def } f(x)$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq f(x_1) < f(x_2)$$

Como vemos que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, f estrictamente creciente en $[0, \infty[$ $\square$

OBS: notamos también que la rama positiva de f está acotada inferiormente por -2 .

pero como f par. entonces para todo $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(-x) = f(x) \geq -2 \Rightarrow f(-x) \geq -2$$

$$\therefore f(x) \geq -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

-2 también es cota de la rama negativa

c) $I_m(t)$

Supongamos $y = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x^2}} \Leftrightarrow y^3 = 1 - \frac{18}{2+x^2}$

$\Leftrightarrow 1 - y^3 = \frac{18}{2+x^2} \Leftrightarrow 2+x^2 = \frac{18}{1-y^3}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{1-y^3} - 2$

Requisito para que esta ecuación tenga solución:

$\frac{18}{1-y^3} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{18 - 2(1-y^3)}{(1-y)(1+y+y^2)} \geq 0$

$\cdot (1+y+y^2)$

$\Leftrightarrow \frac{18 - 2 + 2y^3}{1-y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(8+y^3)}{1-y} \geq 0$ ↪ siempre (+) (bye bye)

$\Leftrightarrow \frac{(2+y)(4-2y+y^2)}{1-y} \geq 0$ ↪ (+) $\Leftrightarrow \frac{2+y}{1-y} \geq 0$

$\cdot (-1)$

$\Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} \leq 0$

$y+2$
 $y-1$

-	+	+	
-	-	+	

$I_m(t) = [-2, 1[$
 $y \in [-2, 1[$

(-)

d) como $\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq f(x) < 1$,

f es acotada. Ya que no puede ser 1,
no posee máximo.

busquemos el mínimo:

$$-2 = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2-x^2}} \Leftrightarrow -8 = 1 - \frac{18}{2-x^2}$$

$$\Leftrightarrow -9 = \frac{-18}{2-x^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2-x^2} \Leftrightarrow 2-x^2=2$$

$$\Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

Gráfico de referencia:

