

Guía de Preparación P1

Benja Vera

Abril 2019

Propiedades de Orden en $\mathbb{R}$

Nivel 1: Principiante

La media geométrica entre dos datos numéricos positivos x y y se calcula mediante la fórmula:

$$MG_{x,y} = \sqrt{xy}$$

Mientras que la media aritmética sigue la fórmula que bien conocemos:

$$MA_{x,y} = \frac{x+y}{2}$$

Alejandro desea que la nota final de Matemáticas I de este semestre se calcule como la media geométrica entre la nota de presentación¹ y la nota del examen. Mientras que Benjamín desea que el cálculo se efectúe con media aritmética. Poniéndose usted en la *hipotética* situación de un estudiante desesperado a finales de este semestre ¿A quién apoyaría? ¿Por qué?

Pista: Suponga que sus notas son números positivos.

Nivel 2: Intermedio

Demuestre que para todo número real positivo a se cumple la siguiente desigualdad:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} \geq a + \frac{1}{a}$$

¹La nota de presentación está formada a partir de las notas de controles y pruebas parciales. Para más información, consulte u-cursos.

Inecuaciones y Supremo

Nivel 1: Principiante

Resuelva las siguientes inecuaciones determinando cotas superiores, inferiores, ínfimo, supremo, máximo y mínimo (en caso de que estos existan) de sus conjuntos solución:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{3}{4x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}} \geq \frac{1}{x-3}$$

Nivel 2: Intermedio

Benjamín y Andrea se encuentran ambos andando en bicicleta desde el campus Beauchef hasta JGM. Se sabe por física elemental que la posición a través del tiempo de un objeto moviéndose a velocidad constante queda descrita por la ecuación:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Donde x_0 es la posición inicial de un objeto y v representa su velocidad.

Si sabemos que inicialmente Andrea se encuentra 1500 metros delante de Benjamín moviéndose a velocidad $v_a = 36[km/h]$ y Benjamín se encuentra en Beauchef moviéndose a $v_b = 43,2[km/h]$:

- (i) Modele $d(t)$, la distancia en función del tiempo entre Benjamín y Andrea.
- (ii) ¿A qué distancia de Beauchef ambos se encontrarán?
- (iii) Si sabemos que Andrea demora 45 minutos en ir desde Beauchef hasta JGM ¿Cuál es la distancia entre JGM y Beauchef? ¿Cuánto demora Benjamín?
- (iv) Sabiendo que cuando se encuentren, ambos seguirán el camino juntos a una velocidad que corresponde al promedio entre las velocidades de ambos, determine el tiempo que se demorarán en llegar hasta JGM contando desde el instante inicial.

Nivel 3: Experto

Considere la siguiente inecuación fraccionaria:

$$\frac{x-1}{x^2+2x-ax-2a} \leq 0$$

Encuentre una condición sobre el parámetro a para que el conjunto solución tenga máximo a .

Polinomios

Nivel 1: Principiante

Beatriz, Benjamín e Ignacio van a armar un polinomio de grado 3 (Porque por supuesto, eso es lo que hacen los matemáticos en su tiempo libre). Beatriz quiere que sea divisible por $x^2 - 1$ porque ese es su polinomio favorito. Además, Benjamín quiere que el polinomio tenga resto 3 al dividirse por $(x - 3)$ e Ignacio solo busca que sea mónico ¿Cuál es el polinomio?

Nivel 2: Intermedio

Determine el valor de k para que el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 18$ sea divisible por $(x - 3)$. ¿Es cierto que si dejamos que el valor de k varíe sobre $\mathbb{R}$ podemos hacer que este polinomio sea divisible por $(x - a)$ para todo a ? En caso de ser así, entregue una función $k(a)$ que asigne a cada valor de a el k necesario para que la condición de divisibilidad se cumpla.

Nivel 3: Experto

Resuelva la siguiente inecuación fraccionaria

$$\frac{x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6}{x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 5x^2 + 3x - 18} \leq 0$$

Pista: Para analizar puntos críticos, nos gustaría factorizar esta expresión y sabemos cómo factorizar polinomios.

Si ud. está en la desesperación, siéntase libre de observar a este buho para recuperar sus ánimos.

