Prueba Parcial 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 11 Abril, 2017

Tiempo : 120 **minutos .**

Nombre:
Sección:

Si tiene celular, este debe permanecer apagado.

1	2	3	4	5	*Puntaje*	*Nota*

JUSTIFIQUE CADA UNO DE SUS RESULTADOS.

De los cinco problemas, elija cuatro de ellos para responder.

1. Se lanza una piedra hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de 9 metros por segundo. La expresión que describe la altura h (medida en metros) de la piedra, con respecto al tiempo t, viene dada por:

$$h = -5t^2 + 9t + 2.$$

   a) ¿Cuánto tiempo demora la piedra en tocar el suelo?

   b) ¿En qué instantes la altura de la piedra es menor a los 5 metros?

Respuesta;

a) El tiempo que transcurre para que la posición de la piedra se haga cero (es decir cuando la piedra toca el suelo), se obtiene resolviendo la ecuacíon cuadrática: $h(t) = 0$

Es decir: $-5t^2 + 9t + 2 = 0$ para $a = -5$; $b = 9$; $c = 2$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Utilizando, $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, se obtiene:

$$t_1 = -\frac{1}{5} \quad y \quad t_2 = 2$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Por tanto,como la variable t representa el tiempo, sólo es válida la solución $t_2 = 2$.

De donde, la piedra demora 2 segundos en tocar el suelo.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

b) Para que la altura de la piedra sea menor a 5 metros, debemos resolver la inecuación: $h(t) < 5$.

Tenemos: $-5t^2 + 9t + 2 < 5 \Leftrightarrow -5t^2 + 9t - 3 < 0$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Para resolver esta inecuación, primero buscamos los ceros de la ecuación $-5t^2 + 9t - 3 = 0$ para $a = -5$; $b = 9$; $c = -3$. Se obtiene:

$$t_1 = \frac{9 - \sqrt{21}}{10} \approx 0{,}44 \quad y \quad t_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{10} \approx 1{,}36$$

Por tanto, como $a = -5$ es menor que cero,
entonces los valores de t que satisfacen la inecuación $-5t^2 + 9t - 3 < 0$ se encuentran en el conjunto: $S =]-\infty; 0{,}44[\cup]1{,}36; +\infty[$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Debemos notar que el contexto de nuestro problema hace que la variable t (que representa el tiempo) esté definida para valores positivos menores e iguales al instante que la piedra toca el suelo, a saber $t = 2$, según la parte a).

Por tanto, el tiempo t en que la altura de la piedra es menor a los 5 metros viene dado por: $t \in S' =]0\ ; 0{,}44[\cup]1{,}36\ ; 2[$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Nombre:

Sección:

2. Demuestre que para todo número real positivo a se cumple:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} \geq a + \frac{1}{a}.$$

En efecto:

Para realizar la demostración, expresaremos la tesis de tal manera que podamos usar la hipótesis y algún otro resultado sabido para demostrarla.

$$a^3 + \frac{1}{a^3} \geq a + \frac{1}{a} \;\Leftrightarrow\; \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) \geq a + \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow\; \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 0.$$

$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

Factorizando por $\left(a + \frac{1}{a}\right)$ nos queda:

$\left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0.$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Por otra parte, como a es positivo su inverso multiplicativo también y suma de valores positivos es positivo, luego $a + \frac{1}{a} > 0$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Además, $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$ es mayor o igual que cero para todo número real $a \neq 0$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

De esta manera tenemos que:

$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0$, mutiplicando la desigualdad por $a + \frac{1}{a}$ la desigualdad se mantiene, así,

$\left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

De donde se desprende que:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} \geq a + \frac{1}{a}.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Otra forma

$$a^3 + \frac{1}{a^3} \geq a + \frac{1}{a} \;\Leftrightarrow\; \frac{a^6+1}{a^3} \geq \frac{a^2+1}{a} \;\; / \cdot a^3 > 0 \;\Leftrightarrow\; a^6 - a^4 - a^2 + 1 \geq 0$$

$$\boxed{\text{1.6 puntos.}}$$

$$a^6 - a^4 - a^2 + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a^4(a^2-1) - (a^2-1) \geq 0$$

$$\boxed{\text{0.6 punto.}}$$

$$\Leftrightarrow\; (a^2-1)(a^4-1) \geq 0$$

$$\boxed{\text{0.6 punto.}}$$

$$\Leftrightarrow\; (a^2-1)(a^2-1)(a^2+1) \geq 0$$

$$\boxed{\text{0.6 punto.}}$$

$$\Leftrightarrow\; (a^2-1)^2(a^2+1) \geq 0$$

$$\boxed{\text{0.6 punto.}}$$

Como $(a^2-1)^2 \geq 0$ y $a^2+1 \geq 0$,

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

se desprende que:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} \geq a + \frac{1}{a}.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Nombre:

Sección:

3. Determine el conjunto A de todos los puntos ubicados en el eje real tales que la suma de sus distancias a los valores -3 y 4 respectivamente, sea menor a 18.

   Del conjunto A, indique cotas superiores e inferiores, máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si es que existen.

Solución:

Se tiene que $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+3| + |x-4| < 18\}$.
Se debe resolver incuación $|x+3| + |x-4| < 18$. **(0.5 ptos)**

Puntos críticos $x = -3$, $x = 4$.

	$x < -3$	$-3 < x < 4$	$4 < x$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$

(0.5 ptos)
Para $x < -3$:

$$\begin{aligned} -(x+3) - (x-4) &< 18 \\ -x - 3 - x + 4 &< 18 \\ -2x + 1 &< 18 \\ x &> -\frac{17}{2} \end{aligned}$$

Luego $x \in \left]-\frac{17}{2}, -3\right[$. **(1 pto)**
Para $-3 < x < 4$:

$$\begin{aligned} (x+3) - (x-4) &< 18 \\ x + 3 - x + 4 &< 18 \\ 7 &< 18 \end{aligned}$$

Luego $x \in \left]-3, 4\right[$. **(1 pto)**

Para $4 < x$:

$$\begin{aligned}(x+3)+(x-4) &< 18\\ x+3+x-4 &< 18\\ 2x-1 &< 18\\ x &< \frac{19}{2}\end{aligned}$$

Luego $x \in \left]4, \frac{19}{2}\right[$. **(1 pto)**

Por último $x = -3$, $x = 4$ también son soluciones de la inecuación:

$$|(-3)+3| + |(-3)-4| = |0| + |-7| = 7 < 18$$

$$|(4)+3| + |(4)-4| = |7| + |0| = 7 < 18$$

(0.5 ptos)

Por lo tanto

$$A = \left]-\frac{17}{2}, -3\right[\cup \{-3\} \cup]-3, 4[\cup \{4\} \cup \left]4, \frac{19}{2}\right[= \left]-\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right[$$

(1 pto)

Cotas superiores: $\{x \in \mathbb{R}/x \geq \frac{19}{2}\}$
Cotas inferiores: $\{x \in \mathbb{R}/x \leq -\frac{17}{2}\}$
$\sup(A) = \frac{19}{2}$, $\text{ínf}(A) = -\frac{17}{2}$. A no posee máximo ni mínimo. **(0.5 ptos)**

Nombre:

Sección:

4. Considere el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$.

   a) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $p(x)$ sea divisible por $x^2 - 1$.

   b) Usando los valores de a y b encontrados en parte (a), encuentre todas las raíces reales de $p(x)$.

Solución:(Forma 1)

a) Para que el polinomio $p(x)$ sea divisible por $x^2 - 1$, debemos verificar que exista un polinomio $q(x)$, tal que $q(x)(x^2-1) = p(x)$. Para esto, realizamos la división entre $p(x)$ con $x^2 - 1$ y el resto debe ser cero.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Luego, al dividir, se obtiene:

$$p(x) \div x^2 - 1 = x^2 + 2x, \text{ con resto } (a+2)x + b.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Luego, como queremos que $(a+2)x+b = 0$, se debe cumplir que $(a+2) = 0$ y $b = 0$. Por lo tanto, $a = -2$ y $b = 0$. Con esto, el polinomio nos queda $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

b) Para encontrar todas las raíces del polinomio $p(x)$, factorizaremos totalmente el polinomio. Como sabemos que $p(x)$ es divisible por x^2-1, tenemos que:

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = (x^2 + 2x)(x^2 - 1).$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Ahora, notemos que $x^2 + 2x = x(x+2)$ y $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Por lo tanto,

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = x(x+2)(x-1)(x+1).$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Con lo que vemos que las raíces son $x = 0$, $x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Solución:(Forma 2)

a) Primero, observemos que las raíces de $x^2 - 1$ son 1 y -1. Como queremos que x^2-1 divida al polinomio $p(x)$, se debe cumplir que 1 y -1 sean reíces de $p(x)$.

$$\boxed{\text{0.5 punto.}}$$

Con esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + b, \\ p(-1) &= (-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1)^2 + a(-1) + b. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{0.5 punto.}}$$

Con lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 + a + b & = 0 \\ -a + b & = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que $= -2$ y $b = 0$. Con tales valores, el polinomio $x^2 - 1$ divide al polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

b) Para encontrar las raíces de $p(x)$, procederemos a factorizar. Sabemos que, por la parte a), que $x^2 - 1$ divide a $p(x)$, por lo que, realizando la división, tenemos que:

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \div x^2 - 1 = x^2 + 2x, \text{ con resto } 0.$$

Por lo tanto,

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = (x^2 - 1)(x^2 + 2x).$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Notemos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $x^2 + 2x = x(x+2)$. Luego, nos queda:

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = (x-1)(x+1)x(x+2).$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

con lo que observamos claramente que las raíces de $p(x)$ son $x = 0$, $x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Nombre:

Sección:

5. Determine los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente desigualdad: $\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \leq x-1$.

Solución:

Las restricciones de la inecuación son:

- $x-2 \neq 0$ ya que el cero no tiene multiplicativo inverso.
- $x-1 \geq 0$ ya que una raíz cuadrada es siempre positiva o nula.
- $\frac{x^2-1}{x-2} \geq 0$ ya que sólo se aplica la raíz cuadrada a un número positivo o cero.

(0.5 puntos)

Solución del conjunto restricción:

Primero determinaremos el conjunto de los números reales x que satisfacen la restricción:

$$\frac{x^2-1}{x-2} \geq 0.$$

Ya que,

$$\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-2}$$

entonces, al analizar los signos de cada factor en la tabla

		-1		1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2-1}{x-2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

obtenemos que:

$\frac{x^2-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \ \ o \ \ x \geq 2.$

(0.5 puntos)

Intersectando con las otras dos restricciones: $x \geq 1$ y $x \neq 2$ tenemos que

$$([-1,1] \cup]2,+\infty[) \cap ([1,2[\cup]2,+\infty[) = \{1\} \cup]2,+\infty[$$

(0.5 puntos)

Luego las tres restricciones se verifican si, $x \in \{1\} \cup]2,+\infty[$. Por lo tanto no existe solución si $x \in \ ]-\infty,1[\ \cup \ ]1,2]$.

Determinemos ahora cuales son los números reales $x \in \{1\} \cup]2,+\infty[$ que satisfacen la inecuación:

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \leq x-1.$$

Observemos que $x=1$ es solución, pues $\sqrt{\frac{1^2-1}{1-2}} = 0$ y $1-1=0$.

Sabemos que:

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \leq x-1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x-2} \leq (x-1)^2$$

$$\frac{x^2-1}{x-2} \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)-(x-2)(x-1)^2}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)[(x+1)-(x-1)(x-2)]}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(-x^2+4x-1)}{x-2} \leq 0$$

(1.0 puntos)

Para analizar el signo de la expresión cuadrática $-x^2+4x-1$, determinamos el conjunto solución de la ecuación: $-x^2+4x-1=0$.

Su discriminante es igual a 12. Como su discriminante es positivo la ecuación tiene dos raíces:

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{12}}{-2} = 2-\sqrt{3}$ y $x_2 = \frac{-4-\sqrt{12}}{-2} = 2+\sqrt{3}$.

Por lo tanto $-x^2+4x-1 = -(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))$ y la desigualdad es equivalente a

$$\frac{-(x-1)(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))}{x-2} \geq 0$$

(1.0 punto)

al analizar los signos de cada factor en la siguiente tabla,

		$(2-\sqrt{3})$		1		2		$(2+\sqrt{3})$	
$(x-(2-\sqrt{5}))$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-(2+\sqrt{3}))$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x-1)(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

concluimos que

$$\frac{(x-1)(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \leq (2-\sqrt{3}) \;\; o \;\; 1 \leq x < 2 \;\; o \;\; x \geq (2+\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$x \in \quad S = \,]-\infty, (2-\sqrt{3})] \cup [1, 2[\, \cup \, [(2+\sqrt{3}), +\infty[.$$

(1.5 puntos)

Como además se debe verificar que $x \in \{1\} \cup]2, +\infty[$, debemos intersectar ambos conjuntos. Como $]2, +\infty[$ se intersecta con S sólo en el intervalo $[(2+\sqrt{3}), +\infty[$ y su intersección es igual al intervalo $[(2+\sqrt{3}), +\infty[$ y $\{1\}$ se intersecta con S sólo en el intervalo $[1, 2[$ en el punto 1, entonces la intersección de ambos conjuntos es el conjunto $\{1\} \cup [2+\sqrt{3}, +\infty[$.

Respuesta : El conjunto de los números reales para los cuales se satisface la inecuación $\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \leq x-1$ es $\{1\} \cup [2+\sqrt{3}, +\infty[$.

(1 punto)