$\underline{P_1}$ | $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(queremos obtener a, b, c, d)

1) $P(x)$ mónico $\Leftrightarrow$ $\boxed{a = 1}$

2) $(x-2)$ es factor $\Leftrightarrow$ 2 es raiz

$\Leftrightarrow P(2) = 0$

$\therefore \quad 8\cancel{a}^{\,1} + 4b + 2c + d = 0 \qquad (1)$

3) $(x+1)$ es factor $\Leftrightarrow$ -1 es raiz

$\Leftrightarrow P(-1) = 0$

$\therefore \quad -\cancel{a}^{\,1} + b - c + d = 0 \qquad (2)$

4) $P(x) : (x-1)$ tiene resto 2

$\Leftrightarrow$ existe $q(x)$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$P(x) = q(x)(x-1) + 2$ / en particular, para $x = 1$,

$P(1) = \cancel{q(x) \cdot (1-1)}^{\,0} + 2 \Leftrightarrow \boxed{P(1) = 2}$

$\therefore \quad \cancel{a}^{\,1} + b + c + d = 2 \qquad (3)$

tenemos:

$$\begin{cases} 4b + 2c + d = -8 & (1) \\ b - c + d = 1 & (2) \\ b + c + d = 1 & (3) \end{cases}$$

$\rightarrow$ (3)-(2):

$(b + c + d) - (b - c + d) = 1 - 1$

$\Leftrightarrow c + c = 0 \Leftrightarrow 2c = 0$

$\therefore \boxed{c = 0}$

$$\begin{cases} 4b + d = -8 & (1) \\ b + d = 1 & (2) \end{cases}$$

(1)-(2): $(4b + d) - (b + d) = -8 - 1$

$\Leftrightarrow 3b = -9 \therefore \boxed{b = -3}$

en (2): $-3 + d = 1 \Leftrightarrow \boxed{d = 4}$

por lo tanto:

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b) ¿es $c = -2$ raíz?

$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 4 = -8 - 12 + 4 \neq 0$

$\therefore$ c no es raíz !!

c) busca TODAS las raíces

Como por construcción, $(x-2)$ y $(x+1)$ son factores, vamos a dividir para encontrar el otro.

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 3x^2 + 4 & : (x-2) = x^2 - x - 2 \\
-(x^3 - 2x^2) & \\
\hline
-x^2 + 4 & \\
-(-x^2 + 2x) & \\
\hline
-2x + 4 & \\
-(-2x + 4) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\therefore P(x) = (x^2 - x - 2)(x-2)$

¡Podemos factorizar esto sin tener que dividirlo por $(x+1)$!

$$\boxed{x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)}$$

$\Rightarrow P(x) = (x-2)(x+1)(x-2) = (x-2)^2(x+1)$

luego, -1 y 2 son las únicas raíces.

P2 $G(x) = 0{,}01(x^3 - 5x^2 - 44x - 60)$

restricción: $x \in \mathbb{N}$

nota: Sin pérdidas $\Rightarrow G \geq 0$. Por lo tanto, nos serviría encontrar las raíces de G para analizar sus signos mediante tabla.

nota 2: Si a es un real positivo distinto de cero, entonces las raíces de $a \cdot P(x)$ son las mismas que las de $P(x)$. Por lo tanto, podemos ignorar el $0{,}01$.

$$G'(x) = x^3 - 5x^2 - 44x - 60$$

raíces racionales:

$$\text{div}(60) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60\}$$

$$\text{div}(1) = \{1\}$$

benja respira profundo

a probar! $\left(G'(x) = x^3 - 5x^2 - 44x - 60 \right)$

$x=1|$ $1 - 5 - 44 - 60 \neq 0$ ✗

$x=-1|$ $-1 - 5 + 44 - 60 = 44 - 66 \neq 0$ ✗

$x=2|$ $8 - 20 - 88 - 60 \neq 0$ ✗

$x=-2|$ $-8 - 20 + 88 - 60 = 88 - 88 = 0$ ✓

$\longrightarrow$ $(x+2)$ es factor.

$$x^3 - 5x^2 - 44x - 60 : (x+2) = x^2 - 7x - 30$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 - 44x - 60 \\ -\underline{(x^3 + 2x^2)} \\ \quad -7x^2 - 44x \\ \quad -\underline{(-7x^2 - 14x)} \\ \qquad -30x - 60 \\ \qquad -\underline{(-30x - 60)} \\ \qquad\qquad 0 // \end{array}$$

$\therefore$ $G'(x) = (x+2)(x^2 - 7x - 30)$

$\hookrightarrow (x-10)(x+3)$

$$G(x) = 0{,}01(x+2)(x+3)(x-10)$$

buscamos $G(x) \geq 0$

$$\Rightarrow 0{,}01(x+2)(x+3)(x-10) \geq 0 \quad / \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+3)(x-10)$$

$-2 \qquad -3 \qquad 10$

$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-10$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

R: Para que no haya pérdidas el mínimo es 10.

P3 $P(x) = kx^3 + x^2 - 3k^2 + 11$

factorizable por $(x+2) \Rightarrow P(-2) = 0$

$$\Leftrightarrow -8k + 4 - 3k^2 + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3k^2 - 8k + 15 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 + 8k - 15 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{244}}{6}$$

Luego,

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{61}}{6} = \frac{\cancel{2}(-4 \pm \sqrt{61})}{\cancel{6}\,3}$$

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{-4+\sqrt{61}}{3} \\ k_2 = \dfrac{-4-\sqrt{61}}{3} \end{cases}$$

P4 i) $P(x) : (x+2)$ obtiene resto 1

$\hookrightarrow P(-2) = 1 \quad (1)$

ii) $P(x) : (x-3)$ obtiene resto 5

$\hookrightarrow P(3) = 5 \quad (2)$

el resto debe tener menor grado que el divisor.

$$P(x) = \overbrace{ax+b} + q(x)(x+2)(x-3)$$

$\hookrightarrow$ queremos obtener a y b.

$$P(-2) \overset{(1)}{=} 1 = -2a + b + \cancel{q(x)(-2+2)(-2-3)} \to 0$$

$$P(3) \overset{(2)}{=} 5 = 3a + b + \cancel{q(x)(3+2)(3-3)} \to 0$$

$$\begin{cases} 1 = -2a + b & (1) \\ 5 = 3a + b & (2) \end{cases}$$

(2)−(1):

$4 = 5a$

$\therefore \boxed{a = \frac{4}{5}}$

en (1):

$1 + 2 \cdot \frac{4}{5} = b$

$\therefore b = 1 + \frac{8}{5} = \boxed{\frac{13}{5}}$

$$\boxed{r(x) = \frac{4x}{5} + \frac{13}{5}}$$