Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Taller de ayudantía 6
Composición y álgebra de funciones. Modelo racional

22/04/2019

En este taller resolveremos un problema contextualizado a partir del modelamiento de una función racional. Analizando este modelo obtendremos información relevante del problema. A partir de un conjunto de funciones definiremos nuevas funciones sumándolas, multiplicándolas, dividiéndolas o componiéndolas. Analizaremos algunas características de ellas como la paridad, monotonía, su signo, su imagen, si es acotada, existencia de mínimos y máximos absolutos. Además demostraremos algunas propiedades de la composición que nos serán útiles para analizar la monotonía.

Objetivos:

- Modelar funciones racionales, interpretando los parámetros que las caracterizan para obtener información relevante del modelo.
- Determinar el dominio y regla de correspondencia de una función definida a través de una suma, producto, cociente y composición de funciones.
- Analizar y determinar el conjunto imagen de una función, encontrando sus cotas y la existencia de mínimos o máximos absolutos.
- Determinar los intervalos donde la función es positiva, negativa o cero.
- Analizar y determinar intervalos de monotonía.

Ejercicios Propuestos

1. A un recipiente que contiene 5 litros de una solución de alcohol al 35 % se le va a introducir una solución de alcohol al 5 %.

   a) Determine el porcentaje de alcohol de la solución contenida en el recipiente en función de la cantidad de litros que se le han vertido.

   b) ¿Cuántos litros hay que agregar para que la concentración inicial se reduzca en un 10 %? ¿Y en un 30 %?

   c) ¿Cuál es el máximo porcentaje en que se puede reducir su concentración?

   d) Si la solución se está vertiendo al recipiente a razón de 0,5 litros por minuto. Determine el porcentaje de alcohol de la solución contenida en el recipiente en función de los minutos transcurridos desde que se empezó a verter la solución.

e) ¿Cuánto se debe esperar para que la concentración de la solución sea 20 %? ¿Cuántos litros de la solución al 5 % hay que agregarle?

f) Grafique ambas funciones.

2. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x$, $g(x) = 2 - x$ y $h(x) = -\dfrac{4}{x-1}$, respectivamente.

   a) Determine los valores de $x \in \mathrm{Dom}(f + h)$ para los cuales

      i) $(f + h)(x) = 0$

      ii) $(f + h)(x) > 0$

      iii) $(f + h)(x) < 0$

   b) Determine la imagen de la función $\dfrac{f}{g}$ y esboce su gráfico.

   c) Determine la imagen de la función $h \circ \left(\dfrac{f}{g}\right)$, analice su monotonía y grafíquela.

   d) Analice los intervalos de monotonía de la función $h \circ g$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[3]{1 - \dfrac{18}{2 + x^2}}$.

   a) Verifique que f es una función par.

   b) Determine el tipo de monotonía de f en el intervalo $[0, \infty[$.

   c) Calcule la Imagen de f.

   d) ¿Es f una función acotada? ¿Posee f un mínimo absoluto o un máximo absoluto? Si la respuesta es afirmativa determine los valores de x para los cuales la función alcanza el valor mínimo absoluto y/o el valor máximo absoluto.

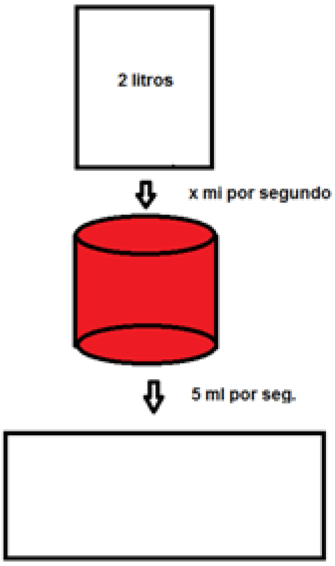
Problemas opcionales

1. a) Sean f y g dos funciones afines con pendientes k_1 y k_2, respectivamente. Muestre que $f \circ g$ es afín y que su pendiente es igual a $k_1 \cdot k_2$.

   b) Demuestre que si f es creciente entonces $f \circ g$ es creciente $\Leftrightarrow$ g es creciente y $f \circ g$ es decreciente $\Leftrightarrow$ g es decreciente.

   c) Demuestre que si f es decreciente entonces $f \circ g$ es decreciente $\Leftrightarrow$ g es creciente y $f \circ g$ es creciente $\Leftrightarrow$ g es creciente.

2. Se desea filtrar 2 litros de agua vertiendo el agua a un filtro. El agua al pasar por el filtro sale a razón de 5[ml/s]. Si el agua se vierte al filtro a razón de x[ml/s], $x > 5$. Se requiere determinar cuál es el valor de x para el cual se debe verter el agua al filtro de modo que el filtro nunca se rebalse y se demore lo menos posible.



Para resolver este problema se le propone lo siguiente:

a) Determine el tiempo T medido en segundos que se necesita para verter los 2 litros de agua al filtro en función de x.

b) Determine el volumen de agua que hay en el filtro en función del tiempo transcurrido desde que se empieza a verter el agua al filtro medido en segundos. Demuestre que esta función es creciente y su máximo valor se obtiene a los T segundos.

c) Determine el volumen de agua,(volumen final) que habrá en el filtro a los T segundos en función de la razón x[ml/s], $x > 5$ a la cual se está vertiendo el agua al filtro. Demuestre que esta función es creciente en el intervalo $]5, \infty[$ y grafíquela.

d) Si el filtro es un depósito cilíndrico de radio 5[cm] y altura 20[cm], determine la razón x[ml/s], $x > 5$, a la cual se debe verter el agua al filtro de modo que el filtro nunca se rebalse y se demore lo menos posible.

e) Determine el tiempo que al menos se requiere para filtrar toda el agua.

Las matemáticas expresan valores que reflejan el cosmos, incluyendo el orden, equilibrio, armonía, lógica y belleza abstracta.