Taller 2

P1 (a) p.d.q.: $\forall a,b \in [0,\infty[,\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

→ primero hagamos uma observacióm:

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad / \ ()^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a}+\cancel{b} \leq \cancel{a} + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \cancel{b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \cancel{2}\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a}\sqrt{b}$$

¡esto se cumple siempre com $a,b \geq 0$!

ahora, vamos a hacer la dem. formal.

dem: seam $a,b \in [0,\infty)$. como no som megativos, sus raíces existem y también som no-megativas.

$$\begin{cases} \sqrt{a} \geq 0 \\ \sqrt{b} \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 \quad / \cdot 2$$

(clausura de $\mathbb{R}_0^+$ bajo el producto)

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \overset{(+a+b)}{\Longleftrightarrow} a+b \leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a+b}_{+} \leq (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow (\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

como todo es positivo, podemos extraer raíz comservamdo el ordem $\Leftrightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ∎

(b) pdq: $|x-3| < 1 \implies \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{x+4} < \dfrac{1}{6}$

dem: sea $x \in \mathbb{R}$ tq $|x-3| < 1$

$$\underset{\left(\substack{\text{def}\\ |\cdot|}\right)}{\iff} -1 < x-3 < 1 \underset{(+7)}{\iff} 6 < x+4 < 8$$

$$\underset{(\,)^{-1}}{\iff} \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

(ojo: hacer esto invierte el orden)

P2 | $U(x) = (120-x)(x-20)$

busco x tq $U(x) > 1600$ / consideración, $\boxed{x>0}$

imponemos,

$$(120-x)(x-20) > 1600 \quad \text{/expando}$$

$$\iff \underbrace{\cancel{120x}}_{} - \cancel{2400} - x^2 + \underbrace{\cancel{20x}}_{140x} > \underbrace{\cancel{1600}}_{4.000}$$

$$\iff x^2 - 140x + 4000 < 0 \quad \text{/factorizo}$$

$$\iff (x-100)(x-40) < 0 \quad \text{/ptos críticos,}$$

$\boxed{x = 100 \\ x = 40}$

análisis de signos:

	$-\infty$	40		100	∞
$x-100$	$-$		$-$		$+$
$x-40$	$-$		$+$		$+$
	$(+)$		$(-)$		$(+)$

$\therefore x \in \,]40, 100[$

P3 $I_A(x) = (5-2x)^2$

$I_B(x) = (x+3)^2$

buscamos x t.q. $I_B(x) > I_A(x)$

imponemos:

$$(x+3)^2 > (5-2x)^2$$

→ <u>observación</u>: la solución estandar sería expandir, agrupar y factorizar igual que en el problema anterior. En esta solución vamos a mostrar un camino alternativo.

$\Leftrightarrow (x+3)^2 - (5-2x)^2 > 0$ / $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$\Leftrightarrow (x+3+(5-2x))(x+3-(5-2x)) > 0$

$\Leftrightarrow (8-x)(3x-2) > 0$ / ptos. críticos: $x=8$, $x=\frac{2}{3}$

	$-\infty$ a $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ a 8	8 a ∞
$8-x$	$+$	$+$	$-$
$3x-2$	$-$	$+$	$+$
	$(-)$	$(+)$	$(-)$

↳ $x \in \left]\frac{2}{3}, 8\right[\cap \mathbb{N}$

↳ la cant. de artículos DEBE ser natural.

P4

rest: $\boxed{x \neq -3}$

(1) $\dfrac{1-2x}{x+3} \le -1$

(2) $\dfrac{x}{3} - 4 \le \dfrac{x}{4} - 3$

$\frac{x+3}{x+3}$

(1) $\iff \dfrac{1-2x}{x+3} + 1 \le 0$

$\iff \dfrac{4-x}{x+3} \le 0$ / ptos críticos: $x=4$, $x=-3$

	$-\infty$	-3		4	∞
$4-x$	$+$		$+$		$-$
$x+3$	$-$		$+$		$+$
	$(-)$		$(+)$		$(-)$

$\hookrightarrow I_1 =]-\infty, -3[\cup [4, \infty[$

(2) $\dfrac{x}{3} - 4 \le \dfrac{x}{4} - 3 \quad / \cdot 12$

$\iff \overset{x}{\cancel{4x}} - \cancel{48} \le \cancel{3x} - \cancel{36} \quad 12$

$\iff x \le 12 \iff I_2 =]-\infty, 12]$

$S_f = I_1 \cap I_2 =]-\infty, -3[\cup [4, 12]$:)