

Taller 2

P₁ ^(a) p.d.q.: $\forall a, b \in [0, \infty[$, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

→ primero hagamos una observación:

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad | \quad ()^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a+b} \leq \cancel{a} + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \cancel{b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \cancel{2}\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a}\sqrt{b}$$

esto se cumple
siempre con
 $a, b \geq 0$!

ahora, vamos a hacer la dem. formal.

dem: sean $a, b \in [0, \infty)$. Como no son negativos, sus raíces existen y también son no-negativas.

$$\begin{cases} \sqrt{a} \geq 0 \\ \sqrt{b} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$$

↓
(clausura
de $\mathbb{R}_0^+$ bajo
el producto)

/ · 2

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \stackrel{(+a+b)}{\Leftrightarrow} a+b \leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \xrightarrow{+}$$

$$\Leftrightarrow \underline{a+b} \leq (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \stackrel{+}{\Leftrightarrow} (\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

como ⁺ todo es positivo, podemos extraer raíz conservando el orden $\Leftrightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ □

(b) pd q: $|x-3| < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$

dem: sea $x \in \mathbb{R}$ tq $|x-3| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x-3 < 1 \Leftrightarrow 6 < x+4 < 8$

$\downarrow$
(def)
||

$\downarrow$
(+7)

$\Leftrightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6} \quad \square$

$\downarrow$
($\cdot$)⁻¹

(ojo: hacer esto invierte el orden)

P₂ | $U(x) = (120-x)(x-20)$

busco x tq $U(x) > 1600$ / consideracion, $x > 0$

imponemos,

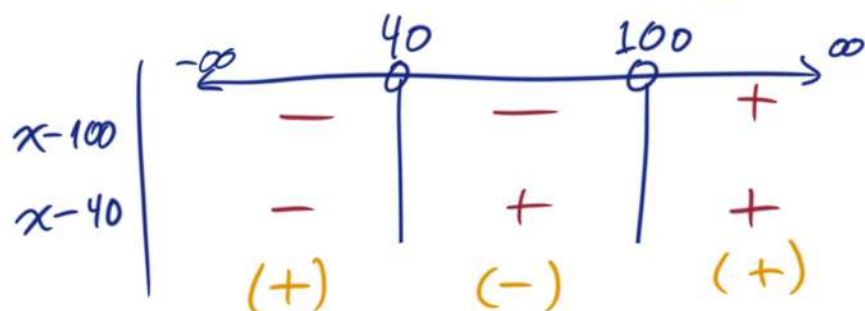
$(120-x)(x-20) > 1600$ / expando

$\Leftrightarrow \cancel{120x} - \cancel{2400} - x^2 + \cancel{20x} > \cancel{1600}$
140x 4.000

$\Leftrightarrow x^2 - 140x + 4000 < 0$ / factorizo

$\Leftrightarrow (x-100)(x-40) < 0$ / pto críticos,
 $x=100$
 $x=40$

análisis de signos:



∴ $x \in [40, 100[$

P3 | $I_A(x) = (5 - 2x)^2$

$I_B(x) = (x + 3)^2$

buscamos x t.q. $I_B(x) > I_A(x)$

imponemos:

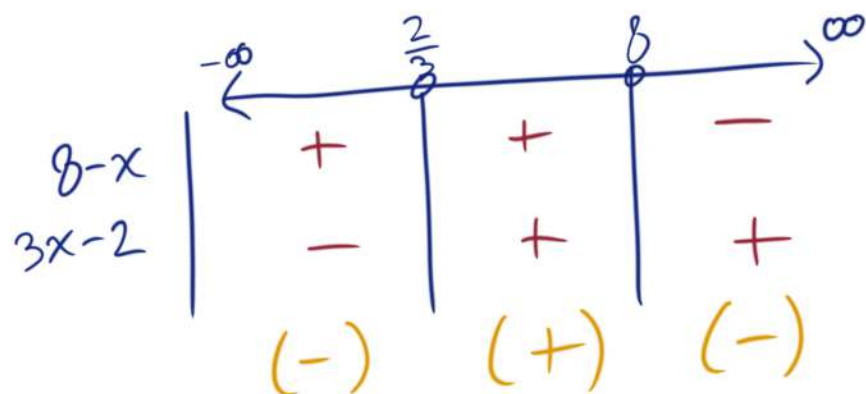
$$(x+3)^2 > (5-2x)^2$$

→ observación: la solución estándar sería expandir, agrupar y factorizar igual que en el problema anterior. En esta solución vamos a mostrar un camino alternativo.

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - (5-2x)^2 > 0 \quad / \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\Leftrightarrow (x+3+(5-2x))(x+3-(5-2x)) > 0$$

$$\Leftrightarrow (8-x)(3x-2) > 0 \quad / \quad \text{ptos. críticos:}$$



$$\begin{array}{|l} x=8 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\hookrightarrow x \in \left] \frac{2}{3}, 8[\cap \mathbb{N}$$

→ la cant. de artículos DEBE ser natural.

P₄

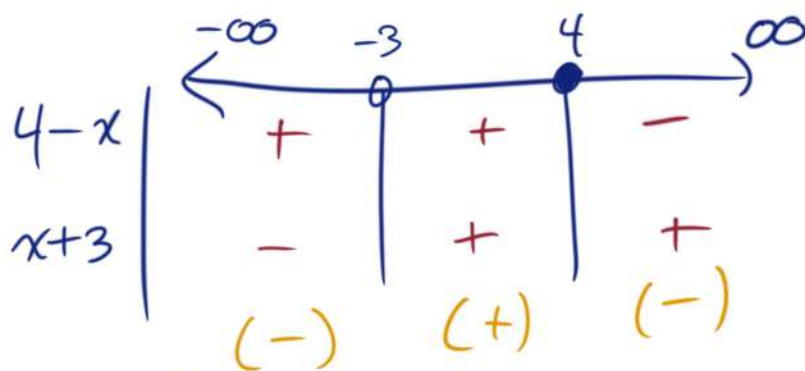
$$(1) \quad \frac{1-2x}{x+3} \leq -1$$

rest: $x \neq -3$

$$(2) \quad \frac{x}{3} - 4 \leq \frac{x}{4} - 3$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x+3} + \overset{\frac{x+3}{x+3}}{1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{x+3} \leq 0 \quad / \quad \begin{array}{l} \text{ptos criticos:} \\ x=4 \\ x=-3 \end{array}$$



$$\hookrightarrow I_1 =]-\infty, -3[\cup [4, \infty[$$

$$(2) \quad \frac{x}{3} - 4 \leq \frac{x}{4} - 3 \quad / \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow 4x - 48 \leq 3x - 36 \quad 12$$

$$\Leftrightarrow x \leq 12 \quad (\Rightarrow) \quad I_2 =]-\infty, 12]$$

$$S_f = I_1 \cap I_2 = \underline{\underline{]-\infty, -3[\cup [4, 12]}} \quad \text{!!}$$