

Solución Taller 15

1. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} & , x < 0 \\ -1 & , x = 0 \\ \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} & , x > 0 \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad de g en $x=0$.
Calculamos, por un lado.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + \frac{|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = -1.$$

y por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1+x)}{\frac{1+x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1.$$

Además como $g(0) = -1$ se tiene.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = -1.$$

En efecto, g es continua en $x=0$.

(ii) para estudiar la continuidad de g en $\mathbb{R}$.
Estudiar en cada trazo.

(a) Note que si $x < 0$ entonces.

$$g_1(x) = x^2 + \frac{1|x|}{x}$$

es continua pues es la suma de Funciones Continuas.

(b) si $x > 0$ entonces.

$$g_2(x) = \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{x}$$

es continua pues es el cociente de Funciones continuas.

Por lo tanto en virtud de lo anterior se tiene que g es continua en $\mathbb{R}$.

$$(b) \quad h(x) = \begin{cases} \frac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{3x^2 + x - 14} & 2 < x \leq 3 \\ \frac{x}{26} + a & x \leq 2 \end{cases}$$

Para que h sea continua en $x=2$ se debe cumplir

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = h(2).$$

luego, por un lado se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{3x^2 + x - 14} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2 + 12x - 40}{(3x^2 + x - 14)(2x + \sqrt{40 - 12x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x-2)(x+5)}{(x-2)(3x+7)(2x + \sqrt{40 - 12x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x+5)}{(3x+7)(2x + \sqrt{40 - 12x})} \\ &= \frac{28}{13 \cdot 8} = \frac{7}{26}. \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{26} + a = \frac{1}{13} + a.$$

luego, $h(2) = \frac{1}{13} + a$

ahora, si h es continua.

$$\Rightarrow \frac{7}{26} = \frac{1}{13} + a$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{26}$$

por consiguiente si $a = \frac{5}{26}$ h es continua en $x=2$.

$$(c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{c+h} - \sqrt[3]{c}}{h} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(c+h)^2} + \sqrt[3]{c(c+h)} + \sqrt[3]{c^2})}{(\sqrt[3]{(c+h)^2} + \sqrt[3]{c(c+h)} + \sqrt[3]{c^2})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c+h-c}{h(\sqrt[3]{(c+h)^2} + \sqrt[3]{c(c+h)} + \sqrt[3]{c^2})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(c+h)^2} + \sqrt[3]{c(c+h)} + \sqrt[3]{c^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$$

Note que el límite anterior existe para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$2.- F(x) = 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 10.$$

$$(a) c \in \text{dom } F \text{ t.q. } F(c) = 100.$$

Sol.: Utilizaremos el T.V.I., para ello necesitamos encontrar un intervalo $[a, b] \in \text{dom } F = \mathbb{R}$ t.q. F sea continua

$$y \quad F(a) < 100 < F(b)$$

$$o' \quad F(b) < 100 < F(a).$$

ahora, considere $a = 1$ y $b = 3$. Entonces

$$F(a) = F(1) = -4.$$

$$F(b) = F(3) = 566.$$

$$\Rightarrow F(a) < 100 < F(b).$$

por otro lado, F es continua en $[1, 3]$ pues corresponde a una función polinomial.

En efecto, por Teorema del valor intermedio Existe $c \in (1, 3)$ t.q.

$$F(c) = 100.$$

obs: note que dado cualquier $y_0 \in [-4, 566]$ podemos encontrar $x_0 \in [1, 3]$ t.q. $F(x_0) = y_0$.

$$(b) \quad 2x^5 + 3x^3 = -x^2 + 10.$$

sol: Note que si x_0 es una solución de la ecuación anterior entonces.

$$2x_0^5 + 3x_0^3 = -x_0^2 + 10.$$

$$\Rightarrow 2x_0^5 + 3x_0^3 + x_0^2 - 10 = 0.$$

$$\Rightarrow F(x_0) = 0.$$

donde

$$F(x) = 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 10.$$

Para responder la existencia de tal solución es equivalente a encontrar un $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $F(x_0) = 0$.

Para hallar el valor utilizaremos el teorema de Bolzano:

Considere $a = 1$ y $b = 3$. entonces $F(1) = -4$.
y $F(3) = 566$

$$\Rightarrow F(1) \cdot F(3) < 0.$$

por otro lado, F es continua en $[1, 3]$ pues corresponde a una función polinomial.

En efecto, en virtud del Teorema de Bolzano

Existe un $x_0 \in (1, 3)$ t.q. $F(x_0) = 0$.

¿Existen más valores reales que cumplan $F(x_0) = 0$?