Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er.* semestre de 2019

Control 10
Trigonometría

12/06/2019

Nombre: ______________________ **Curso:** ____________

Elija sólo uno de los problemas que se presentan a continuación.
Duración: 20 minutos.

1. Considere las funciones $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, tales que $f(x) = -2\pi x + \pi$ y $g(x) = 3\cos(x) + 4$, respectivamente.
   Grafique $(g \circ f)$ determinando explíctamente su dominio. Además, a partir del gráfico, indique el conjunto imagen y sus intervalos de monotonía.

   Solución: Primero vamos a determinar el dominio de la función composición y luego su regla de asignación. Para calcular el dominio de $(g \circ f)$ vamos a verificar si se cumple que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$,

   $$0 \leq x \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \geq -2\pi x \geq -2\pi \;\Leftrightarrow\; \pi \geq -2\pi x + \pi \geq -\pi,$$

   luego $\mathrm{Im}(f) \subset [-\pi,\pi] = \mathrm{Dom}(g)$, por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) = [0,1]$

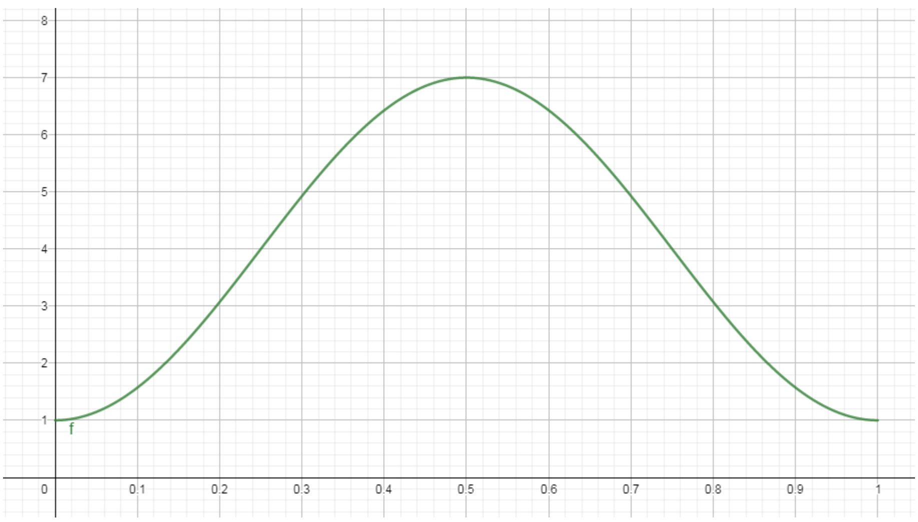
   $$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

   La regla de asignación viene dada por

   $$((g \circ f))(x) = g(f(x)) = g(-2\pi x + \pi) = 3\cos(-2\pi x + \pi) + 4.$$

   $$\boxed{\text{1 punto.}}$$

   Ahora vamos a graficar $(g \circ f)(x) = 3\cos(-2\pi x + \pi) + 4$ en el intervalo $[0,1]$.



$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

Del gráfico se desprende que $\mathrm{Im}(g \circ f) = [1, 7]$. Además, $(g \circ f)$ es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y estrictamente decreciente en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

2. Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[-\pi, 3\pi]$ que satisfacen la ecuación

$$\cos^2(3x) + 3\,\mathrm{sen}(3x) - 3 = 0.$$

Solución: Utilizando que $\cos^2(3x) = 1 - \mathrm{sen}^2(3x)$ y reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$1 - \mathrm{sen}^2(3x) + 3\,\mathrm{sen}(3x) - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{sen}^2(3x) - 3\,\mathrm{sen}(3x) + 2 = 0.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Factorizando la última expresión, nos queda

$$\mathrm{sen}^2(3x) - 3\,\mathrm{sen}(3x) + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{sen}(3x) - 1)(\mathrm{sen}(3x) - 2) = 0,$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

se sigue que

$$\mathrm{sen}(3x) = 1 \;\text{ ó }\; \mathrm{sen}(3x) = 2.$$

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Notemos que la ecuación $\mathrm{sen}(3x) = 2$ no tiene solución, ya que la función seno sólo toma valores en el intervalo $[-1,1]$.

$$\boxed{\text{1,5 puntos.}}$$

Para resolver la ecuación $\mathrm{sen}(3x) = 1$, utilizamos el cambio de variable, $u = 3x$. Así,

$$\mathrm{sen}(u) = 1; \Leftrightarrow\; u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

por lo tanto,

$$\mathrm{sen}(3x) = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Finalmente, el conjunto solución de $\cos^2(3x) + 3\operatorname{sen}(3x) - 3 = 0$. con $x \in [-\pi, 3\pi]$ es

$$\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right\}.$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$