Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 9
Funciones y trogonometría
05/06/2019

Nombre: ____________________ **Curso:** ____________

Debe entregar de forma grupal la solución de los 2 ejercicios que se presentan a continuación. El grupo debe tener como máximo cuatro integrantes.

Debe mantener su celular apagado y guardado durante el control.
tiempo: 45 minutos.

1. Considere las funciones $f\colon \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$ y $g\colon [2,+\infty[\to \mathbb{R}$, tales que $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ y $g(x) = \sqrt{x-2}+1$, respectivamente.

   a) Determine todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$.
   Solución: Primero vamos a determinar la imagen de un elemento de la forma $g(x)$,

$$\begin{aligned} 2 &\leq x, \\ 0 &\leq x-2, \\ 0 &\leq \sqrt{x-2}, \\ 1 &\leq \sqrt{x-2}+1 = g(x). \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $g(x) \in [1,+\infty[$.

$\boxed{\text{1,5 puntos.}}$

   Una observación importante respecto a este cálculo es que no estamos asegurando que la imagen es $[1,+\infty[$, sólo podemos asegurar que está contenida en ese intervalo, para probar formalmente que la imagen de la función g es $[1,+\infty[$ ***debe utilizar la definición*** *vista en clases.*

   Teniendo en consideración lo anterior, debemos determinar para qué valores de $x \in [2,+\infty[$, tenemos que $g(x) \in \mathbb{R}-\{1\}$. Para esto, notamos que el único valor que no es posible es cuando $g(x) = 1$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por lo tanto, determinando tal valor, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 \\ \sqrt{x-2}+1 &= 1 \\ \sqrt{x-2} &= 0 \\ \Rightarrow x &= 2. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, si $x \in]2, +\infty[$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

b) Demuestre que $(f \circ g)$ es estrictamente decreciente en $]2, +\infty[$.
Solución: Primero vamos a calcular la regla de asignación de $(f \circ g)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}+1) = \frac{1}{\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} = \frac{1}{|x-2|} = \frac{1}{x-2}.$$

En la última igualdad se ha utilizado que $x \in]2, +\infty[$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Para desarrollar lo pedido, consideremos $a, b \in]2, +\infty[$, tales que $a < b$, a partir de lo anterior debemos concluir que $(f \circ g)(a) > (f \circ g)(b)$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Luego,

$$\begin{aligned} 2 < a &< b \\ 0 < a-2 &< b-2 \\ \Rightarrow \frac{1}{a-2} &> \frac{1}{b-2} \\ \Rightarrow (f \circ g)(a) &> (f \circ g)(b). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Con lo que concluimos que $f \circ g$ es decreciente en $]2, +\infty[$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

2. a) Demuestre la siguiente identidad trigonométrica

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(2u)} - 1 = \frac{(1-\tan(u))^2}{2\tan(u)}.$$

Solución: Comenzaremos desarrollando los términos del lado derecho y llegaremos, a partir de argumentos algebraicos, al lado izquierdo.

$$\frac{(1-\tan(u))^2}{2\tan(u)} = \frac{(\cos(u)-\operatorname{sen}(u))^2}{\cos^2(u)} \cdot \frac{\cos(u)}{2\operatorname{sen}(u)} = \frac{\operatorname{sen}^2(u)+\cos^2(u)-2\operatorname{sen}(u)\cos(u)}{2\operatorname{sen}(u)\cos(u)}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por otro lado, sabemos que $\operatorname{sen}^2(u)+\cos^2(u)=1$ y $2\operatorname{sen}(u)\cos(u)=\operatorname{sen}(2u)$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Reemplazando, obtenemos

$$\frac{(1-\tan(u))^2}{2\tan(u)} = \frac{1-\operatorname{sen}(2u)}{\operatorname{sen}(2u)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2u)} - 1.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

b) Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[-2\pi, \pi]$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{(1-\tan(x))^2}{2\tan(x)} = 1.$$

Solución: Utilizando el ítem anterior, obtenemos que $\displaystyle\frac{(1-\tan(x))^2}{2\tan(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} - 1 = 1,$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Notemos que hay restricciones para nuestro problema, ya que la expresión $\operatorname{sen}(2x)$ aparece en el denominador, luego $\operatorname{sen}(2x) \neq 0$.

$$\operatorname{sen}(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = k\pi,\;\; k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k\pi}{2},\;\; k \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Como $x \in [-2\pi, \pi]$, x no puede tomar los valores $-2\pi,\ -\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Con tales restricciones obtenemos que $sen(2x) \neq 0$, luego

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} - 1 = 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2},$$

donde los valores x reales que satisfacen esa ecuación son aquellos que cumplen

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \vee \ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Finalmente las soluciones en el intervalo $[-2\pi, \pi]$ (y que además no son restricciones del problema) son

$$-\frac{23\pi}{12}, \ -\frac{11\pi}{12}, \ \frac{\pi}{12}, \ -\frac{19\pi}{12}, \ -\frac{7\pi}{12}, \ \frac{5\pi}{12}.$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$