Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 7
Biyectividad e inversa de funciones
22/05/2019

Nombre: ______________________________ **Curso:** ______________

Elija sólo uno de los problemas que se presentan a continuación.
Duración: 20 minutos.

1. Sea $f\colon \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, tal que $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

   Demuestre que f es biyectiva y calcule f^{-1}.

   Hint: Utilice la forma canónica de una función cuadrática.

   Solución: Primero demostraremos que f es inyectiva, para ello notemos que

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Sean $a, b \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$, tales que $f(a) = f(b)$, vamos a demostrar que $a = b$.

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(b) \\
\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} &= \sqrt{\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \quad /()^2 \\
\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} &= \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad / - \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \quad /\sqrt{} \\
\Leftrightarrow \left|a - \frac{1}{2}\right| &= \left|b - \frac{1}{2}\right|.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Como $a, b \geq \frac{1}{2}$, se tiene que $a - \frac{1}{2} \geq 0$ y $b - \frac{1}{2} \geq 0$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

por lo tanto, $a - \frac{1}{2} = b - \frac{1}{2} \Leftrightarrow, a = b$. Con esto hemos demostrado que la función f es inyectiva.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Ahora mostraremos que f es epiyectiva, para ello debemos demostrar que $\operatorname{Im}(f) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.

Dado $y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, necesitamos encontrar $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, tal que $f(x) = y$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Sea $x = \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$. Como $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ se sigue que $y^2 - \frac{3}{4} \geq 0$. Aplicando raíz cuadrada a la desigualdad anterior, y luego sumando $\frac{1}{2}$, obtenemos

$$x = \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Finalmente,

$$f(x) = f\left(\sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = y.$$

Así, f es epiyectiva, y por lo anterior, se sigue que f es biyectiva.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como f es biyectiva tiene inversa, a saber,

$$f^{-1} \colon \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\to \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[, \text{ tal que } f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Sea $f\colon \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \to \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, tal que $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

a) Demuestre que f es estrictamente decreciente. **(3,5 puntos.)**

Solución: Primero escribiremos la cuadrática dentro de la raíz en su forma canónica,

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Ahora demostraremos que f es estrictamente decreciente, para ello debemos considerar $a, b \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$, tales que $a < b$ y tenemos que probar que $f(a) > f(b)$.

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Sean $a < b < \dfrac{1}{2}$

$$a - \frac{1}{2} < b - \frac{1}{2} < 0 \quad /()^2$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \quad / + \frac{3}{4}$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{\text{1,5 puntos.}}$$

Aplicamos raíz cuadrada a la desigualdad anterior, como la función raíz cuadrada es estrictamente creciente entonces la desigualdad se conserva, es decir,

$$\sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} > \sqrt{\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Por lo tanto, $f(a) > f(b)$ y la función f es estrictamente decreciente.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

b) Asuma que f es biyectiva para calcular f^{-1}. **(2,5 puntos.)**
Hint: Utilice la forma canónica de una función cuadrática.

Solución: Para encontrar la fórmula o regla de asignación de f^{-1} debemos despejar x en función de y

$$y = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \quad /()^2$$

$$y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad / - \frac{3}{4}$$

$$y^2 - \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad /\sqrt{}$$

$$\sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} = \left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

En nuestro caso, $x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} < 0$, por lo tanto, $\left|x - \frac{1}{2}\right| = -(x - \frac{1}{2})$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Despejando x, obtenemos

$$x = -\sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Luego,

$$f^{-1}\colon \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\to \left]-\infty, \frac{1}{2}\right], \text{ tal que } f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$