Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 6
Funciones racionales y composición de funciones

15/05/2019

Nombre: ______________________________ **Curso:** ______________

Elija sólo uno de los problemas que se presentan a continuación.
Duración: 20 minutos.

1. Considere la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\dfrac{7x-5}{x-2}$.

   a) Escrba f en su forma canónica, y a partir de ésta, esboce el gráfico y concluya el conjunto imagen de la función.

   b) Demuestre que f es decreciente en $]-\infty,2[$.

Solución: a) Primero escribiremos f en su forma canónica, para ello vamos a dividir polinomios

$$\begin{array}{rl} 7x\ \ -5 & = \big(x-2\big)\,7+9 \\ \underline{-\,7x+14} & \\ 9 & \end{array}$$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

por lo tanto, $7x-5=7(x-2)+9$. Dividiendo esta igualdad por $x-2$, obtenemos

$$f(x)=\frac{7x-5}{x-2}=\frac{9}{x-2}+7.$$

Luego, la forma canónica de f es $f(x)=\dfrac{9}{x-2}+7$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Para el gráfico, debemos recordar que f tiene una asíntota vertical en $x=2$ y una asíntota horizontal en $y=7$, por lo tanto, la imagen de f corresponde al conjunto $\mathbb{R}-\{7\}$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Solución: b) Para demostrar que f es decreciente, tenemos que considerar x_1, $x_2 \in \,]-\infty, 2[$ tales que $x_1 < x_2$ y debemos demostrar que $f(x_1) > f(x_2)$.

Por hipótesis tenemos que $x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como los términos $x_1 - 2$ y $x_2 - 2$ son negativos, al comparar sus inversos multiplicativos la desigualdad se invierte, es decir, $\dfrac{1}{x_1 - 2} > \dfrac{1}{x_2 - 2}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Finalmente, si multiplicamos la última desigualdad por 9 y luego al resultado le sumamos 7 nos queda

$$\frac{9}{x_1 - 2} + 7 > \frac{9}{x_2 - 2} + 7,$$

por lo tanto, $f(x_1) > f(x_2)$ y se sigue que la función f es decreciente en $]-\infty, 2[$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Sean $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ y $g : [3, 2019] \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas por

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}, \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x-3}.$$

Determine la composición $g \circ f$ indicando su dominio y regla de asignación.

Solución:) Primero calcularemos el dominio de la función $g \circ f$, éste está definido por

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \ / \ f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\},$$

en nuestro caso,

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \ / \ f(x) \in [3, 2019]\}.$$

Por lo tanto, debemos resolver la inecuación $3 \leq f(x) \leq 2019$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

$$\begin{aligned}
3 &\leq 1 - \frac{1}{x+1} \leq 2019 & / - 1\\
2 &\leq -\frac{1}{x+1} \leq 2018 & / \cdot (-1)\\
-2 &\geq \frac{1}{x+1} \geq -2018 & /()^{-1}\\
-\frac{1}{2} &\leq x+1 \leq -\frac{1}{2018} & 1\\
-\frac{3}{2} &\leq x \leq -\frac{2019}{2018}. &
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{2,5 puntos.}}$$

Se sigue que

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap \left[-\frac{3}{2}, -\frac{2019}{2018}\right] = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{2019}{2018}\right].$$

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

Finalmente, la regla de asignación o fórmula está dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x+1} - 3} = \sqrt{\frac{-2x-3}{x+1}}.$$

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$