Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 5
Funciones, modelos afín y cuadrático

25/04/2019

Nombre: ______________________________ **Curso:** ____________

Debe mantener su celular apagado y guardado durante el control.
tiempo: 20 minutos.

1. La fórmula que describe la posición con respecto al tiempo de una piedra lanzada hacia arriba desde una altura h_0, medida en metros, con una velocidad inicial v_0, medida en metros sobre segundos, está dada por:

$$f(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

con g la aceleración de gravedad, medida en metros sobre segundos al cuadrado. Suponiendo que la piedra es lanzada desde una altura inicial $h_0 = 1$ $[m]$ con velocidad inicial $v_0 = 4$ $[m/s^2]$, y considerando la aceleración de gravedad como $g = -10$ $[m/s^2]$, responda:

(a) A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo demora la piedra en tocar el suelo? Si definimos f como la función que modela el lanzamiento, la cual tiene como regla de asignación la fórmula anteriormente descrita, deduzca el dominio de la función f.

(b) Grafique la función y con esto calcule el conjunto imagen de f considerando el dominio encontrado en (a).

Solución: a) El tiempo que transcurre para que la posición de la piedra se haga cero (es decir cuando la piedra toca el suelo), se obtiene resolviendo la ecuacíon cuadrática $f(t) = 0$, es decir, $-5t^2 + 4t + 1 = 0$.

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

En este caso, $a = -5$, $b = 4$ y $c = 1$. Utilizando $t = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se obtiene:

$$t_1 = -\frac{1}{5}, \quad t_2 = 1.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Además, $t \geq 0$, ya que t representa el tiempo. Por lo tanto, sólo es válida la solución $t_2 = 1$.

Así, la piedra demora 1 segundo en tocar el suelo.

$$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$$

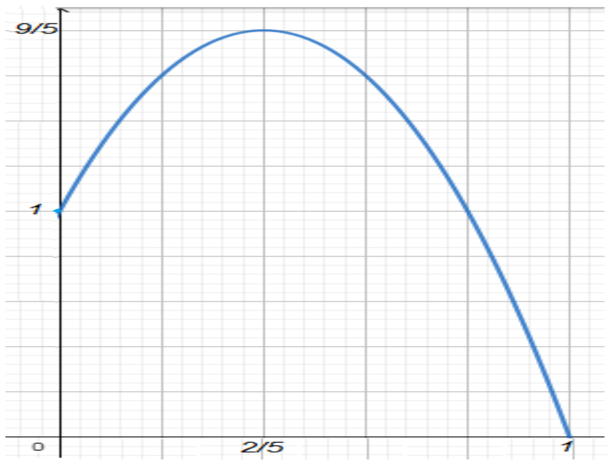
En consecuencia, el modelo cuadrático descrito tiene por dominio el conjunto $[0, 1]$ y por codominio $\mathbb{R}_0^+$, ya que las imágenes corresponden a alturas sobre el nivel del suelo, es decir,

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_0^+, \text{ tal que } f(t) = -5t^2 + 4t + 1.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Para el gráfico de f utilizaremos la forma canónica $f(x) = -5t^2 + 4t + 1 = -5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$



$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Finalmente, observando el gráfico podemos deducir que la imagen de f es $\left[0, \frac{9}{5}\right]$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

2. Un estanque contiene inicialmente 2000[L] de agua. Justo al mediodía, el estanque se rompe y comienza a perder agua a razón de 125[L] por hora. Modele el volumen de agua en el estanque desde el mediodía, en función del tiempo(Indique explícitamente el dominio), esboce el gráfico de esta función, y a partir de éste, determine el conjunto imagen.

   Solución: Sea $V(t)$ el volumen de agua en litros del estanque a partir del mediodía, en función del tiempo t medido en horas.
   $V(0)$ corresponde al volumen de agua del estanque al mediodía, es decir, $V(0) = 2000$[L].

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Además, a las t horas de transcurrido el mediodía el estanque ha perdido $125t$ litros, por lo cual el volumen de agua que queda en el estanque a las t horas está dado por $V(t) = 2000 - 125t$.

$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

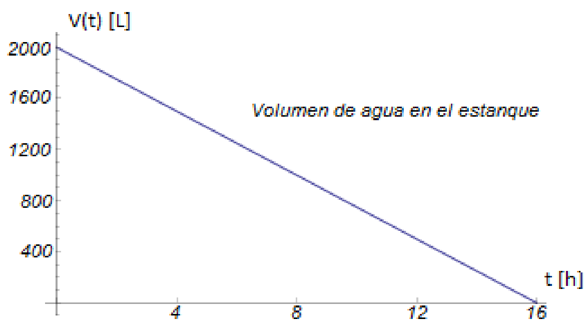
Por otra parte, $V(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2000 - 125t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 16$.

$\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

Por lo tanto, $V : [0, 16] \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $V(t) = 2000 - 125t$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

El modelo obtenido es una función afín, y su representación gráfica es una recta con pendiente negativa (-125) por lo tanto su gráfico nos queda:



$\boxed{\text{1,5 puntos.}}$

Finalmente, a partir del gráfico podemos deducir que la imagen de V corresponde a $[0, 2000]$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

3. a) Determine la única función cuadrática $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = ax^2 + bx + 4$ que cumple que $x + 2$ es un factor de $F(x)$ y $F(-1) = F(3)$. (3,5 puntos.)
   b) A partir del item a), escriba F en su forma canónica y deduzca la imagen de F. (2,5 puntos)

Solución: a) Comenzamos recordando que si $(x + 2)$ es un factor de $F(x)$, entonces $F(-2) = 0$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Reemplzando en -2, obtenemos $F(-2) = 0 = 4a - 2b + 4$.

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$

Por otro lado, $F(-1) = F(3) \Leftrightarrow a - b + 4 = 9a + 3b + 4 \Leftrightarrow b = -2a$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Utilizando las ecuaciones $0 = 4a - 2b + 4$ y $b = -2a$, obtenemos que $a = -\dfrac{1}{2}$ y $b = 1$. Por lo tanto, la única función F que cumple lo pedido es $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 4$.

$\boxed{\text{1,5 puntos.}}$

b) Calcularemos el vértice para encontrar la forma canónica de F.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\frac{-1}{2}} = 1 \ \text{ y } \ F(1) = -\frac{1}{2} + 1 + 4 = \frac{9}{2},$$

Por lo tanto, la forma canónica de F es $F(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{9}{2}$.

$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

Finalmente, como el dominio de F es $\mathbb{R}$ y el valor de $a = -\dfrac{1}{2}$ se deduce que $\mathrm{Im}(F) = \left]-\infty, \dfrac{9}{2}\right]$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$