

Taller 9

1. $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{8\}$ definida por

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^3 = \left(\frac{2x-2+2-1}{x-1} \right)^3 = \left(2 + \frac{1}{x-1} \right)^3$$

a) Sea $y \in \text{Im} f$, entonces existe $x \in \text{Dom} f$ tal que $y = f(x)$, es decir

$$y = \left(2 + \frac{1}{x-1} \right)^3$$

$$\sqrt[3]{y} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

$$\sqrt[3]{y} - 2 = \frac{1}{x-1}$$

$$(\sqrt[3]{y} - 2)x + -\sqrt[3]{y} + 2 = 1$$

$$(\sqrt[3]{y} - 2)x = -1$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{\sqrt[3]{y} - 2} \Rightarrow \sqrt[3]{y} - 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow y \neq 8$$

Luego, $\text{Im} f = \mathbb{R} - \{8\}$

b) Como $\text{Im} f = \mathbb{R} - \{8\} = \text{Cod} f \Rightarrow f$ es epyectiva.

Veamos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom} f$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, i.e

$$\left(2 + \frac{1}{x_1-1} \right)^3 = \left(2 + \frac{1}{x_2-1} \right)^3$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{x_1-1} = 2 + \frac{1}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1}$$

$$x_2 - 1 = x_1 - 1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow f$ es inyectiva.

c) $\text{Dom } f^{-1} = \text{Cod } f$, $\text{Cod } f^{-1} = \text{Dom } f$ y
como en a) vimos como obtener x a partir de y , tenemos
que f^{-1} es

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{8\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

2 a) Demostraremos que una función estrictamente creciente
es inyectiva (la demostración para una decreciente es análoga)

Sea f una función tal que si $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

PD $(a \neq b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Sean $a, b \in \text{Dom } f$ tales que $a \neq b$. Entonces:

• $a > b$. En este caso, como f es creciente, $f(a) > f(b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

ó

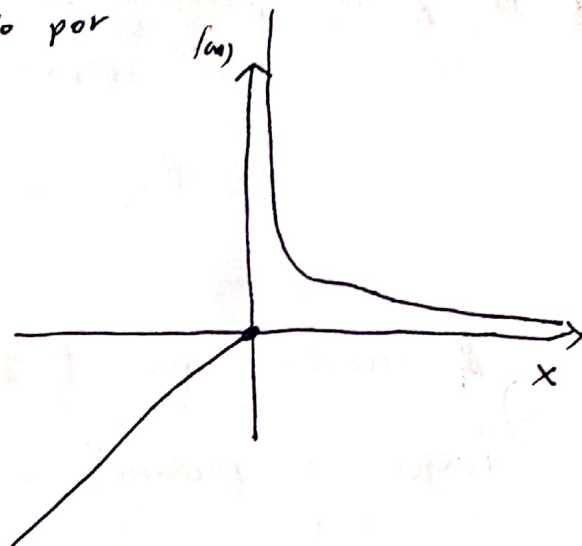
• $b > a$. En este caso, como f es creciente, $f(b) > f(a) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

De todas formas, concluimos que

f es inyectiva.

b) Consideramos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ 1/x & \text{si } x \in (0, \infty) \end{cases}$$



f es inyectiva, pero además
es creciente en $(-\infty, 0]$ y
decreciente en $(0, \infty)$.

c) Sea f biyectiva y creciente, demostramos que f^{-1} es creciente.
Sean $a, b \in \text{Dom}(f^{-1})$, tales que $a < b$.

Como $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Cod}(f) = \text{Im}(f)$, existen $x, y \in \text{Dom}(f)$ tales que
 $a = f(x)$ y $b = f(y)$.

Hay Tres casos

$$a = f(x)$$

1) $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow a > b$

* Esto último no es cierto, por $a < b$. Luego este caso nunca pasa

2) $x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow a = b$

* →

3) $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow a < b$. (Vamos bien, evitamos el problema de 1) y 2)

Si $x < y$, $\overbrace{f^{-1}(f(x))}^x < \overbrace{f^{-1}(f(y))}^y$; por $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

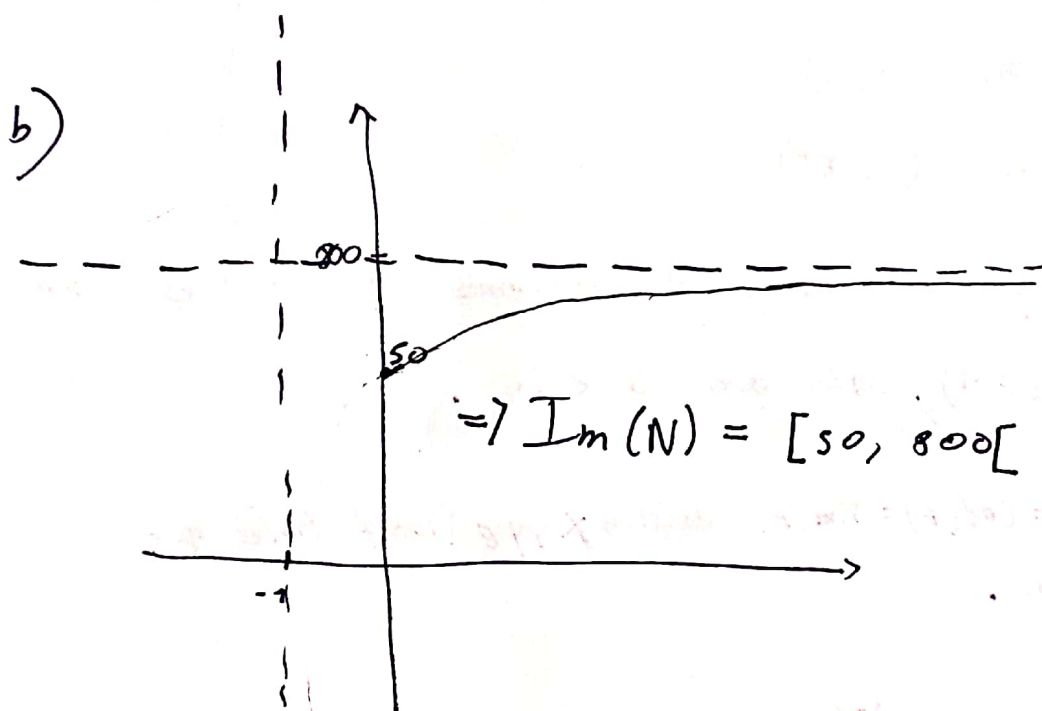
$\Rightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$

$\Rightarrow f^{-1}$ es creciente.

d) No y no, pues $\text{Dom } f = \text{Cod } f^m$, y en este caso

$$\mathbb{R} \neq [0, \infty[$$

3) A medida que t aumenta, $\frac{-750}{t+1}$ se acerca a 0, luego la población es como máximo 800 garzas



c) Como $\text{Cod } N = \text{Im}(N)$, N es epyectiva. De la gráfica vemos que N es inyectiva, de hecho
Si $a, b \in \text{Dom}(N)$ tq

$$N(a) = N(b)$$

$$\Rightarrow 800 - \frac{750}{a+1} = 800 - \frac{750}{b+1}$$

$$\Rightarrow \frac{750}{b+1} = \frac{750}{a+1}$$

$$\Rightarrow a+1 = b+1$$

$$\Rightarrow a = b$$

$\Rightarrow N$ es inyectiva
 $\therefore N$ es biyectiva

En efecto, la inversa es la función $t: [50, 800[\rightarrow]0, \infty[$,
donde $t(N)$ cumple

$$N = 800 - \frac{750}{t+1}$$

$$(N-800)t + (N-800) = -750$$

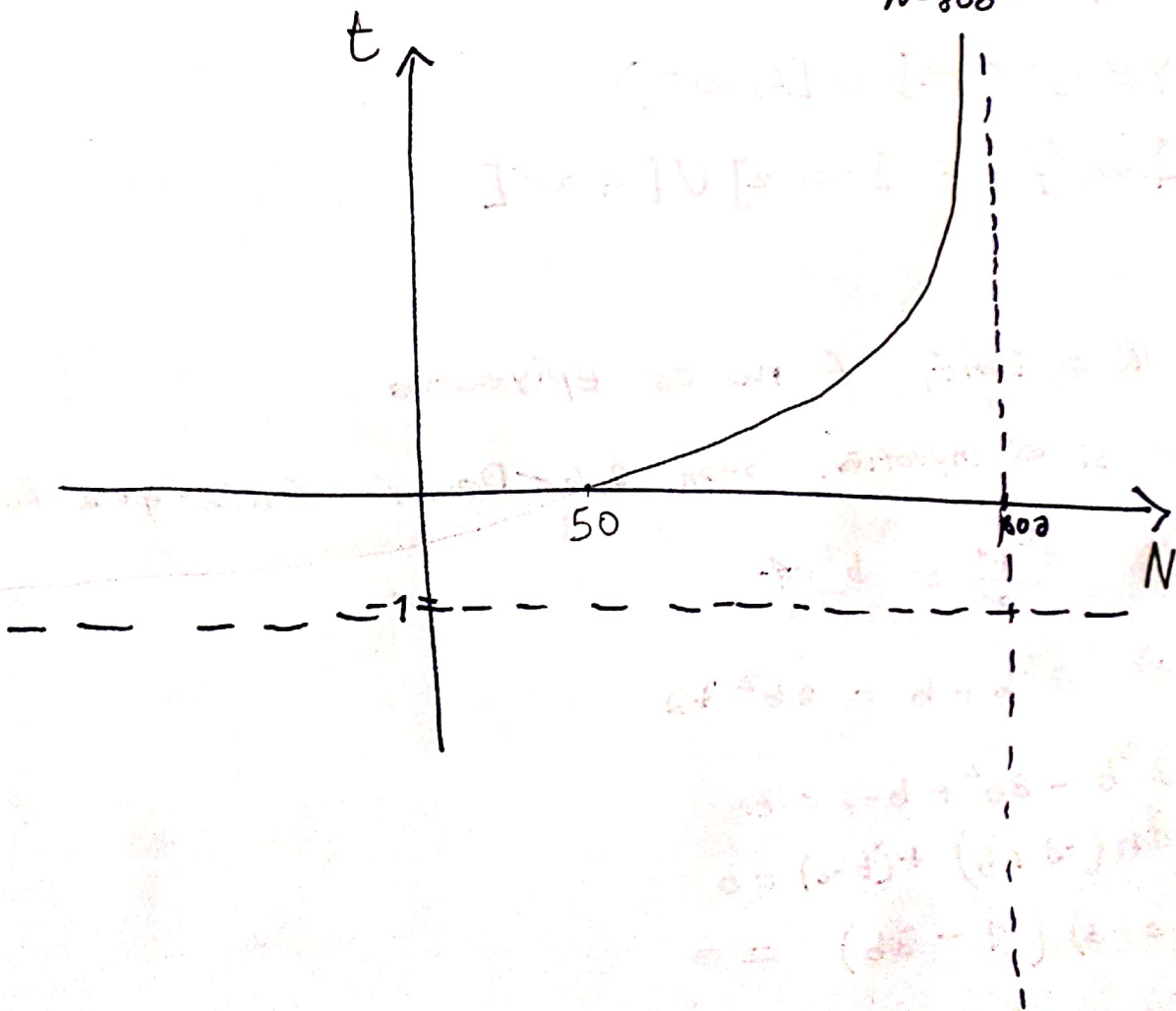
$$(N-800)t = 800 - N - 750$$

$$t = \frac{50 - N}{N - 800}$$

$$t = - \frac{(N - 50 - 800 + 800)}{N - 800}$$

$$t = - \left(1 + \frac{750}{N - 800} \right)$$

$$t = -1 + \frac{-750}{N - 800}$$



4. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(s) = s + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 1}{s}$

a) Sea $y \in \text{Im } f$, entonces existe $x \in \text{Dom } F$ tal que $y = f(x)$, es decir

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\Rightarrow yx = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow y \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) =]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$$

b) Como $\mathbb{R} \neq \text{Im } f$, f no es epyectiva

• Veamos si es inyectiva. Sean $a, b \in \text{Dom } f$ tal que $f(a) = f(b)$, así

$$\frac{a^2 + 1}{a} = \frac{b^2 + 1}{b}$$

$$\Rightarrow a^2 b + b = ab^2 + a$$

$$\Rightarrow a^2 b - ab^2 + b - a = 0$$

$$-ab(-a+b) + (b-a) = 0$$

$$(b-a)(1-ab) = 0$$

Pos opciones, $b-a=0 \Rightarrow a=b \checkmark \Rightarrow$ en este caso f inyectiva

o-

$$1-ab=0 \Rightarrow 1=ab \Rightarrow a=\frac{1}{b}, \text{ si } a=\frac{1}{2}, f(a)=2+\frac{1}{2}=f(\frac{1}{2})$$

Luego f no es inyectiva.

c) Como $\text{cod}(g) = \text{Im}(g)$ por definición, g es eyectiva.
Para probar que g es inyectiva, sean a, b tales que $g(a) = g(b)$, así

$$\frac{a^2+1}{a} = \frac{b^2+1}{b}$$

Por lo tanto

$$\Rightarrow (b-a)(1-ab) = 0$$

Como $\text{Dom } g = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$, $a \neq \frac{1}{b}$ para todo a, b ,
es decir $ab \neq 1$ y $0 \neq 1-ab$. Luego podemos dividir a
ambos lados por $(1-ab)$, obtenemos

$$b-a = 0$$

$$b = a$$

$\therefore g$ es inyectiva.

$\therefore g$ es biyectiva

$$\Rightarrow \exists g^{-1}: \text{Im } g \longrightarrow \text{Dom } g.$$

De 2), hay dos opciones, hay que ver a cual corresponde
esta rama:

i) $g^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$. Nosotras sabemos que $g(2) = \frac{5}{2}$,

ii) $g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$.
luego $g^{-1}(5/2) = 2$.

En el caso i), $g^{-1}(5/2) = 2$. 😊

ii), $g^{-1}(5/2) = 1/2$. ☹️

Por lo tanto, la inversa con este dominio y codominio es

$$g^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$