Taller 8

1

a) Si el volumen del cubo es $27 cm^3$, como $V = l^3$ (donde el Volumen es V y la arista es l), la arista es 3cm.

Luego el área inicial es $(A = 6l^2)$ $6 \cdot 3^2 cm^2 = 36 cm^2$

Como el área disminuye $-2{,}5 cm^2$ cada 3 mins, el área es

$$A(t) = 36 \cancel{cm^2} - \frac{2{,}5}{3} t \quad cm^2$$

b) El área a los 36 mins es

$$A(36) = 36 - \frac{2{,}5}{3} \cdot 36$$
$$= 36 - 2{,}5 \cdot 12$$
$$= 36 - 30$$
$$= 30 \; cm^2$$

Luego la arista es l, donde

$$30 = 6 \cdot l^2$$
$$5 = l^2$$
$$l = \sqrt{5} \; cm$$

c) Al igual que en b) podemos saber la arista del cubo a partir del área.

$$A(t) = 6\ell^2(t)$$

$$\ell(t) = \sqrt{\frac{A(t)}{6}}$$

Luego el volumen es

$$V(t) = \ell^3(t) = \left(\sqrt{\frac{A(t)}{6}}\right)^3$$

$$V(t) = \frac{A(t)}{6} \cdot \sqrt{\frac{A(t)}{6}}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{A(t)}{6}}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{6}\left(36 - \frac{2,5}{3}t\right)}\right)^3$$

d)

Sea t ese instante, en ese momento

$$V(t) = \frac{27}{3} \ cm^3$$

$$V(t) = 9$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{6}\left(36 - \frac{2,5}{3}t\right)}\right)^3 = 9$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}\left(36 - \frac{2,5}{3}t\right)} = \sqrt[3]{9} \quad /(\,)^2$$

$$\frac{1}{6}\left(36 - \frac{2,5}{3}t\right) = \sqrt[3]{81}$$

$$6 - \frac{5}{36}t = 3\sqrt[3]{3}$$

$$6 - \sqrt[3]{81} = \frac{5}{36}t$$

$$\Rightarrow \frac{6 \cdot 36 - 36\sqrt[3]{81}}{5} = t$$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: [-1,1[\to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

a) $f(x) = \frac{x^2+1-1-1}{x^2+1}$

$= 1 + \frac{-2}{x^2+1}$

$g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$= \sqrt{-1\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$

$= \sqrt{-1 \cdot \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)}$

$= \sqrt{-1 + \frac{2}{1-x}}$

Busquemos primero Im f.

$Y = 1 + \frac{-2}{x^2+1}$

$Y-1 = \frac{-2}{x^2+1}$

$\frac{Y-1}{-2} = \frac{1}{x^2+1}$

$x^2+1 = \frac{-2}{Y-1}$

$x^2 = -1 - \frac{2}{Y-1}$

$x = \pm\sqrt{-1-\frac{2}{Y-1}}$

$\Rightarrow -1 - \frac{2}{Y-1} \geq 0$

$\frac{1-Y-2}{Y-1} \geq 0$

$\frac{-1-Y}{Y-1} \geq 0$

$\frac{1+Y}{Y-1} \leq 0$

pts crit $= \{-1, 1\}$

Im $f = [-1, 1[$

Ahora Im g.

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{-(x-1)}} = \sqrt{-1+\frac{2}{1-x}} \Rightarrow y \geq 0$$

$$y^2 = -1 + \frac{2}{1-x}$$

$$y^2+1 = \frac{2}{1-x}$$

$$y^2+1 - x(y^2+1) = 2$$

$$y^2-1 = x(y^2+1)$$

$$\frac{y^2-1}{y^2+1} = x$$

$\Rightarrow y^2+1 \neq 0 \rightarrow$ siempre

$$\text{Im } g = \mathbb{R}^+_0.$$

i) f sí, g No

ii) f sí, mínimo absoluto, -1.

iii) Como $f(x) = 1 + \frac{-2}{x^2+1}$, es creciente y

$g(x) = \sqrt{-1 + \frac{-2}{x-1}}$ también

c) i) $f(1) = f(-1) = 0$, pero $1 \neq -1$.

ii) Sean $x, y \in \text{Dom}\, g$ tales que

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{-1 - \frac{2}{x_1 - 1}} = \sqrt{-1 - \frac{2}{x_2 - 1}} \quad /(\ )^2$$

$$\Rightarrow -1 - \frac{2}{x_1 - 1} = -1 - \frac{2}{x_2 - 1}$$

$$\frac{2}{x_2 - 1} = \frac{2}{x_1 - 1}$$

$$x_1 - 1 = x_2 - 1$$

$$x_1 = x_2$$

d) $\text{Dom}\, g \circ f = \{ x \in \text{Dom} f \,/\, f(x) \in \text{Dom}\, g \}$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 1 - \frac{2}{x^2+1} \in [-1, 1[\right\}$$

Como $\text{Im}\, f = [-1, 1[$, $\text{Dom}\, g \circ f = \mathbb{R}$ y

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{\frac{x^2-1}{x^2+1} + 1}{1 - \frac{x^2-1}{x^2+1}}} = \sqrt{\frac{\frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{x^2+1}}{\frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x^2+1}}} = \sqrt{\frac{2x^2}{2}} = |x|$$

Ahora

$f \circ g\,(x)$.

$$\text{Dom } f\circ g = \{ x \in \text{Dom } g \;/\; \text{Im}(g) \subseteq \text{Dom } f \}$$

$$= \{ x \in [-1,1[\;/\; \sqrt{-1-\tfrac{2}{x-1}} \in \mathbb{R} \}$$

Para que $\sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} \in \mathbb{R}$, $\; -1-\frac{2}{x-1} \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{-x+1-2}{x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x-1}{x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow x \in [-1,1[$$

$\therefore$ $\text{Dom } f\circ g = [-1,1[$

$$f\circ g\,(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)^2 - 1}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{x+1}{1-x} - 1}{\frac{x+1}{1-x} + 1} = \frac{\frac{x+1-1+x}{1-x}}{\frac{x+1+1-x}{1-x}}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

c) $g \circ f(x) = |x|$, para que $g \circ f(x) = x$,

$$|x| = x$$
$$\Rightarrow x \geq 0$$
$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}_0^+$$

3)

i) Sean $x_1, x_2 \in B$, tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

Por hipótesis, $f(x_1)$ tiene una única preimagen.

Sabemos que x_1 es preimagen de $f(x_1)$. Además, x_2 también es preimagen de $f(x_1)$ ($= f(x_2)$). Como la preimagen es única, $x_1 = x_2$,

ii) Sea $y \in Im(f)$. Entonces $y = f(a)$ para algún $a \in Dom f$.
Entonces tiene preimagen. Hay que demostrar que si
$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, entonces la preimagen es única.

Luego;

Sean x_1, x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$, como f es inyectivo, $x_1 = x_2$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$

i) Sean $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tales que $x_1 < x_2$, entonces

$$x_1 < x_2 \quad (1) \quad /(\ )^3$$

$$x_1^3 < x_2^3 \quad (2)$$

Sumando (1) + (2)

$$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$\therefore$ f es creciente

Conjeturamos que la imagen de f es $\mathbb{R}$.

ii) de a) sabemos que esto es equivalente a probar que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tq $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2$$

$$(x_1^3 - x_2^3) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1\right) = 0$$

Si $x_1 - x_2 = 0$

$x_1 = x_2$ ✓

Si $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0$ / Lo vemos como una cuadrática en x_1,

$\Delta < 0$. $\therefore$ Este factor es $\neq 0$.

Luego

$$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)=0 \,,$$ como $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)$ nunca es igual a 0, (pues $\Delta<0$.)

$$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)=0 \quad / \cdot \frac{1}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1}$$

$$x_1-x_2=0$$

$$\Rightarrow \quad x_1=x_2.$$

4) $f:[-3,\infty[\ \to [0,\infty[\,, \quad f(x)=\sqrt[3]{(x+3)^2}$

a) Nosotros sabemos que $\sqrt[3]{\ }$ es siempre creciente, entonces mantiene el orden.

Luego analizamos lo que está adentro de la raíz.

- $(x+3)^2$ es creciente en $[-3,\infty^+[$
- $(x+3)^2$ es decreciente en $]-\infty,-3[$

Como el dom $f=[-3,\infty^+[$, nuestra hipotesis es que f es creciente en todo su dominio. En efecto,

Sean $x_1,x_2\in[-3,\infty^+[$ tq $\quad x_1<x_2 \quad /+3$

$$0<x_1+3<x_2+3 \quad /(\ )^2$$

$$(x_1+3)^2<(x_2+3)^2 \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$\sqrt[3]{(x_1+3)^2}<\sqrt[3]{(x_2+3)^2} \quad \#$$

Scanned by CamScanner

b) Determinemos $\operatorname{Im} f$.

Sea $y \in \operatorname{Im} f$, $\exists x \in \operatorname{Dom} f$ tq

$$y = f(x),$$
$$y = \sqrt[3]{(x+3)^2}$$
$$y^3 = (x+3)^2 \quad / \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{y^3} = x+3 \quad / -3$$
$$\sqrt{y^3} - 3 = x \qquad \Rightarrow y^3 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_0^+$$

Ahora veamos que f es inyectiva:

Sean x_1, x_2 tq $\cancel{f(x_1)=f(x_2)}$. $(f(x_1) = f(x_2))$, es decir

$$\sqrt[3]{(x_1+3)^2} = \sqrt[3]{(x_2+3)^2} \quad / (\ )^3$$
$$(x_1+3)^2 = (x_2+3)^2 \quad / \sqrt{\ }$$
$$|x_1+3| = |x_2+3|, \quad \text{como } x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f,$$
$$x_1, x_2 > -3$$
$$x_1+3 = x_2+3 \qquad \Rightarrow x_1+3 \geq 0$$
$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ f es inyectiva

c) Definimos

$$g : [0, \infty^+[\rightarrow [-3, \infty^+[$$
$$g(x) = \sqrt{y^3} - 3$$

así $f \circ g(x) = g \circ f(x) = id(x) = x, \ \forall x \in \operatorname{Dom} g$