

Taller 7

1) $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, $x+y=10$, $S = x^2 + y^2$

a) Como $x+y=10$, $y=10-x$ y entonces

$$\begin{aligned} S &= x^2 + (10-x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(x) = 2x^2 - 20x + 100$$

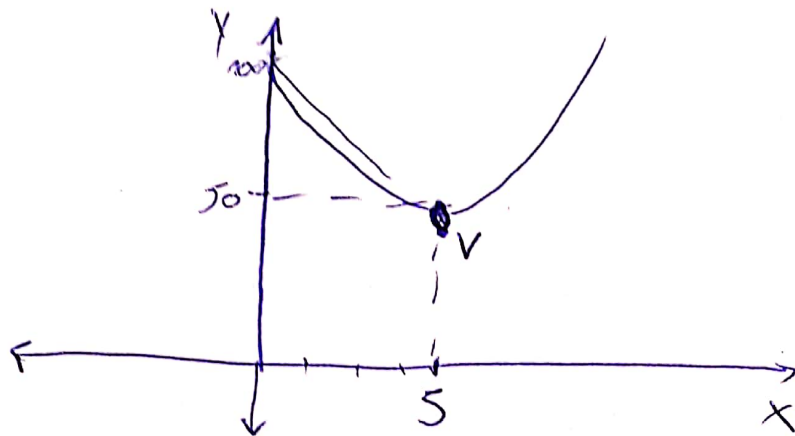
Como $x \geq 0$ e $y = 10-x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \text{Dom } S &= \left\{ x \in \mathbb{R}_0^+ : 10-x \in \mathbb{R}_0^+ \right\} \\ &= [0, 10] \end{aligned}$$

b) Notemos que

$$\begin{aligned} S(x) &= 2x^2 - 20x + 100 \\ &= 2(x^2 - 10x + 50) \\ &= 2(x-5)^2 + 50 \end{aligned}$$

Entonces examinemos la gráfica:



- c) El mínimo está en el vértice $V = (5, 50)$,
 luego $x = 5$ e $y = 10 - x = 10 - 5 = 5$.
 El valor mínimo de S es 50.

- d) i) f es decreciente para $x \in [0, 5)$, pues
 si $x, y \in [0, 5)$ tales que $x < y$,

$$x - 5 < y - 5 \quad / (-)^2, \quad y - 5 < 0 \text{ pues } y \in [0, 5)$$

$$(x - 5)^2 > (y - 5)^2 \quad / (2(\cdot) + 50)$$

$$\Rightarrow 2(x - 5)^2 + 50 > 2(y - 5)^2 + 50$$

$$f(x) > f(y)$$

i) S es creciente para $x \in (5, 10]$ pues dados $x, y \in]5, 10]$ Eq $x < y$,

$$x - 5 < y - 5 \quad |(\cdot)|^2$$

$$(x-5)^2 < (y-5)^2$$

$$2(x-5)^2 + 50 < 2(y-5)^2 + 50$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} - \{2/3\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = |x|$

$$g(x) = \frac{4x-3}{2-3x}$$

a) Como

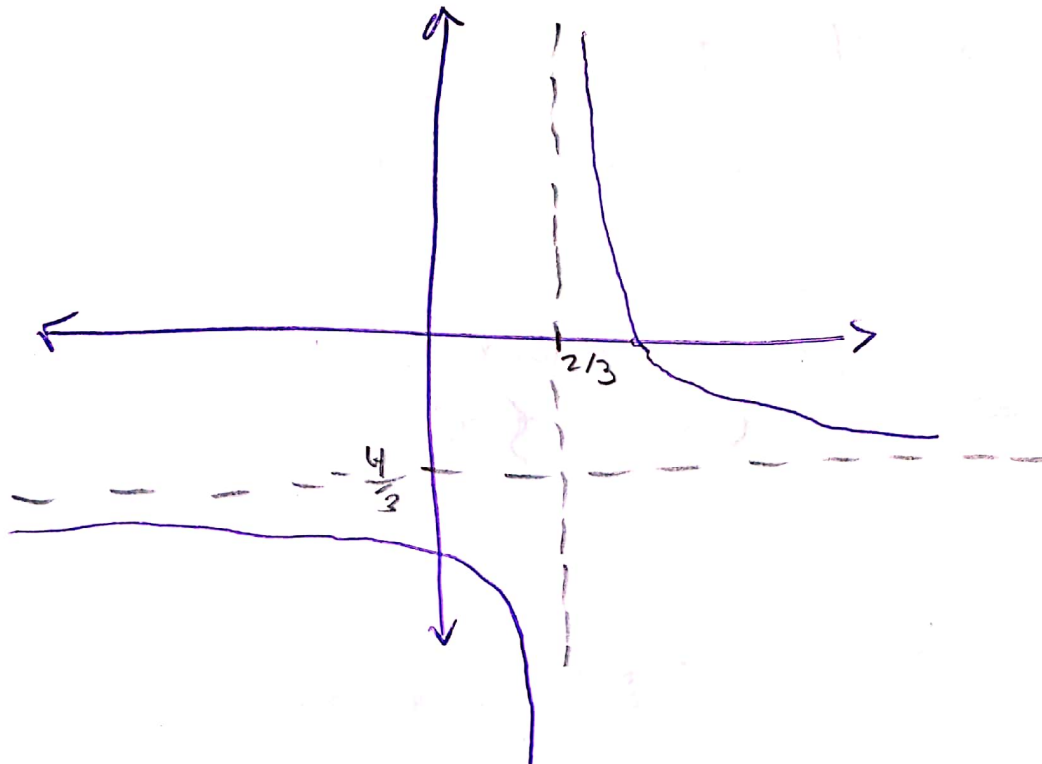
$$g(x) = \frac{4x-3}{2-3x}$$

$$= \frac{-4}{3} \left(\frac{-x + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} \right)$$

$$= \frac{-4}{3} \left(1 + \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} \right)$$

$$= -\frac{4}{3} - \frac{1}{6-9x}$$

Entonces su gráfica es



b) f es decreciente para todo $x \in \mathbb{R} - \{2/3\}$. Dados $x, y \in \mathbb{R} - \{2/3\}$ tq

$$\begin{aligned} x &< y & | \cdot (-9) \\ -9x &> -9y \\ 6-9x &> 6-9y & | (-1) \\ \frac{1}{6-9x} &> \frac{1}{6-9y} \end{aligned}$$

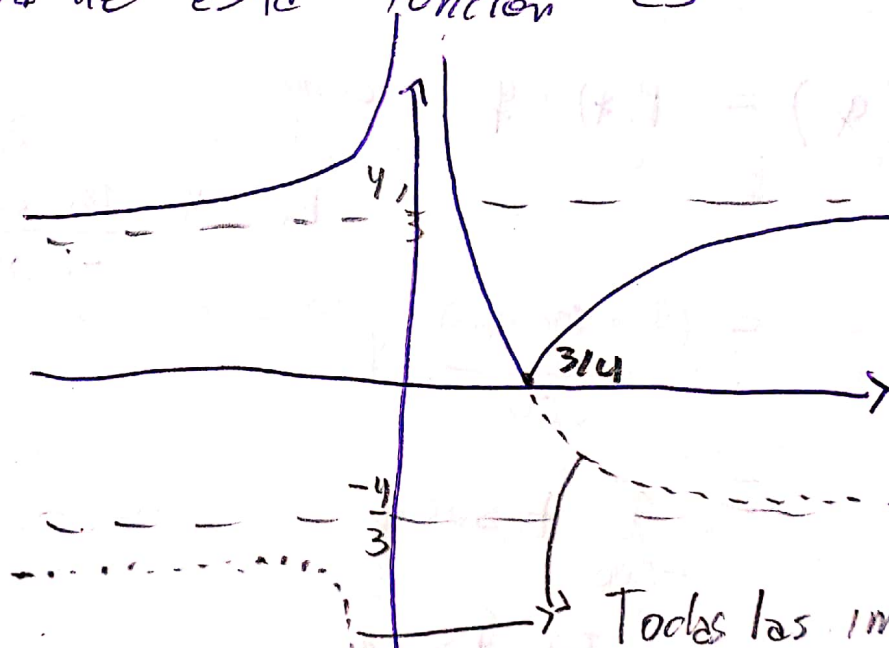
$$-\frac{4}{3} + \frac{1}{6-9x} > -\frac{4}{3} + \frac{1}{6-9y}$$

$\therefore f$ es decreciente en todo su dominio

$$\begin{aligned}
 c) \text{ Dom } f \circ g &= \{x \in \text{Dom } g : g(x) \in \text{Dom } f\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} - \{2/3\} : \underbrace{g(x) \in \mathbb{R}}_{\text{siempre}}\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} - \{2/3\}\} \\
 &= \mathbb{R} - \{2/3\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f \circ g(x) &= f(g(x)), \text{ luego} \\
 f \circ g(x) &= \left| -\frac{4}{3} - \frac{1}{6-9x} \right|.
 \end{aligned}$$

La gráfica de esta función es



Todas las imágenes negativas se reflejan respecto al eje x .

$$d) f \circ g \left(\left[\frac{3}{4}, \infty \right) \right) = \left[0, \frac{4}{3} \right[$$

acotado inf. por 0, sup por $4/3$.

3) La cantidad de panes demandados al año, en función del precio p de venta, es

$$q(p) = 100.000 - 200p$$

El costo de producir q panes es

$$C(q) = 150.000 + 100q + \frac{3}{1000} q^2$$
$$= 150.000 + 100q + 0,003q^2$$

$$R := \text{Ingreso total} = p \cdot q$$

$$U := \text{Utilidad total} = R - C$$

$$a) R(q) = p(q) \cdot q, \quad \begin{array}{l} \text{como} \\ q = 100.000 - 200p, \\ p(q) = \frac{q - 100.000}{-200} \end{array}$$

$$= \frac{(q - 100.000)}{-200} \cdot q$$

$$= \frac{q^2}{-200} + 500q$$

$$= -0,005q^2 + 500q$$

$$b) U(q) = R(q) - C(q)$$

$$= -0,005q^2 + 500q - 150.000 - 100q - 0,003q^2$$

$$= -0,008q^2 + 400q - 150.000$$

c) Para encontrar el máximo, buscamos el vértice, que está en

$$q = \frac{-400}{2 \cdot (-0,008)} = \frac{200}{\frac{8}{1000}} = 200 \cdot \frac{1000}{8} \\ = 200 \cdot 125 \\ = 25000$$

Luego el precio es $p = \frac{25000 - 100000}{-200}$

$$= \frac{-75000}{-200} \\ = 375$$

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - (-3)| + |x - 4|$
 $= |x + 3| + |x - 4|$

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 3| + |x - 4| < 18\}$

• $|x + 3| + |x - 4| < 18$

	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x+3$		-	+	
$x-4$		-	-	+

Caso 1, $x \in (-\infty, -3]$

$$-(x+3) - (x-4) < 18$$

$$-2x + 1 < 18$$

$$-2x < 17$$

$$x > \frac{17}{2}$$

$$S_1 = (-\infty, -3] \cap \left(\frac{17}{2}, +\infty\right) \\ = \emptyset$$

Caso 2, $x \in (-3, 4]$

$$x+3 - (x-4) < 18$$

$$7 < 18$$

$$S_2 = (-3, 4] \cap \mathbb{R} \\ = (-3, 4]$$

Caso 3, $x \in (4, \infty^+)$

$$x + 3 + x - 4 < 18$$

$$2x - 1 < 18$$

$$x < \frac{19}{2} = 9,5$$

$$S_3 = (4, \infty^+) \cap (-\infty, 9,5)$$

$$= (4, \frac{19}{5})$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$= \emptyset \cup (-3, 4] \cup (4, \frac{19}{5})$$

$$= (-3, \frac{19}{5})$$

$$\therefore A = (-3, \frac{19}{5})$$

Cotas superiores: $[\frac{19}{5}, \infty^+)$

Cotas inf.: $(-\infty, -3]$

Supremo : $\frac{19}{5}$

Infimo : -3

máximo : No tiene

mínimo : No tiene