Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Taller de ayudantía 8
Modelamiento de funciones y propiedades de funciones

06/05/2019

En este taller, resolveremos un problema contextualizado utilizando modelamiento de funciones. Repasaremos los conceptos de funciones, tales como: dominio, imagen, monotonía y operaciones entre ellas. Analizaremos, demostraremos y aplicaremos propiedades de la imagen.

Objetivos:

- Resolver problemas mediante el modelamiento de funciones.
- Realizar operaciones entre funciones.
- Analizar la monotonía de una función.
- Analizar propiedades de la imagen de una función.
- Demostrar propiedades sencillas de la imagen de una función.
- Aplicar propiedades de la imagen para obtener información de ella.

Ejercicios Propuestos

1. Un cubo de hielo de $27[\text{cm}^3]$ de volumen se comienza a licuar de modo que su área superficial disminuye $2,5[\text{cm}^2]$ por cada $3[\text{min}]$. Determine:

   a) El área superficial del cubo de hielo en función del tiempo.

   b) La longitud de su arista a los 36 minutos.

   c) El volumen del cubo en función del tiempo.

   d) ¿Cuánto tardará en reducirse el volumen del cubo de hielo a la tercera parte de su volumen inicial?

2. Considere las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon [-1,1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$, respectivamente.

   a) Calcule $\text{Im}(f)$ y $\text{Im}(g)$. Utilizando los cálculos de la imagen, responda las siguientes preguntas

      i) ¿Son funciones acotadas superior o inferiormente?

      ii) ¿Poseen un valor máximo absoluto y/o un valor mínimo absoluto?

b) Analice la monotonía de f y de g.

c) Pruebe que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces no necesariamente $x_1 = x_2$, y además, pruebe que si $g(x_1) = g(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

d) Determine el dominio y la regla de correspondencia de las funciones $g \circ f$ y $f\ circg$.

e) Determine el conjunto de todos los números reales x para los cuales $(g \circ f)(x) = x$

3. a) Sea $f\colon B \to D$

   i) Muestre que si se cumple que para cada $y \in \mathrm{Im}(f)$ existe un único $x \in D$ tal que $f(x) = y$ entonces también se satisface que para $x_1, x_2 \in B$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

   ii) Inversamente, muestre que si se satisface que para $x_1, x_2 \in B$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ se cumple que $x_1 = x_2$. entonces también se cumple que para cada $y \in \mathrm{Im}(f)$ existe un único $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

   b) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x$.

   i) Muestre que f es creciente en $\mathbb{R}$. ¿Qué puede conjeturar de su imagen?

   ii) Muestre que para cada $y \in \mathrm{Im}(f)$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 + x = y$

4. Considere la función $f\colon [-3, \infty[\to [0, \infty[$, tal que $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2}$

   a) Analice la monotonía de f.

   b) Determine la imagen de f y demuestre que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

   c) Defina la función $g\colon [0, \infty[\to [-3, \infty[$ de modo que $g(y) = x$ siempre que $f(x) = y$.

Comienza donde estás, usa lo que tienes y haz lo que puedas.