Solución Taller 6.

1.- sea x el porcentaje de alcohol en la mezcla.

Note que

$$x(v) = \frac{s(v)}{S(v)}$$

donde $s(v)$ es la cantidad de alcohol
$S(v)$ es el total de mezcla.

. En virtud del enunciado se tiene.

$$s(v) = \frac{35}{100} \cdot 5 + \frac{1}{20} v.$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{20} v.$$

y

$$S(v) = 5 + v.$$

luego.

$$x(v) = \frac{\frac{7}{4} + \frac{1}{20} v}{5+v}.$$

luego

$$X(V) = \frac{35 + V}{100 + 20V}$$

(b) (i) $X(V) = \frac{25}{100} \Rightarrow X(V) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{35+V}{100+20V} = \frac{1}{4} \Rightarrow V = \frac{5}{4}\ [L].$$

(ii) $X(V) = \frac{5}{100} \Rightarrow X(V) = \frac{1}{20}$.

$$\Rightarrow \frac{35+V}{100+20V} = \frac{1}{20} \Rightarrow V \longrightarrow \infty$$

(c) note que independiente de la concentración inicial al agregar concentración al 5% ésta siempre prevalecerá.

(d) $r_0 = 0{,}5\left[\frac{L}{min}\right]$

$$\Rightarrow V(t) = 5 + \frac{1}{2}t. \quad , t \text{ en minutos.}$$

$$= \frac{10+t}{2}.$$

Luego,

$$x(V(t)) = \frac{35 + \left(\frac{10+t}{2}\right)}{100 + \cancel{20}\left(\frac{10+t}{\cancel{2}}\right)}$$

$$= \frac{80+t}{2(200+10t)}$$

(e) $x(V(t)) = 20\,\% \Rightarrow t =$

$\Rightarrow V(t) =$ y $x(V) =$.

(f)

2.- $f(x) = 5 - x$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = \dfrac{-4}{x-1}$.

(a) Note que

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}(f+h) &= \{x \in \mathbb{R} \mid (f+h)(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) + h(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 6x + 9}{1-x} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \\
&= \mathbb{R} \setminus \{1\}.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
(f+h)(x) &= f(x) + h(x) \\
&= (5 - x) - \frac{4}{x-1} \\
&= \frac{x^2 - 6x + 9}{1-x} \\
&= \frac{(x-3)^2}{1-x}.
\end{aligned}$$

luego

(i) $(f+h)(x) = 0 \iff x = 3$.

(ii) $(f+h)(x) > 0 \iff x < 1$

es decir $x \in (-\infty, 1)$

(iii) $(f+h)(x) < 0 \iff x > 1, \ x \neq 3$

es decir $x \in (1,3) \cup (3,\infty)$.

(b). Note que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5-x}{2-x} = 1 + \frac{3}{2-x}$$

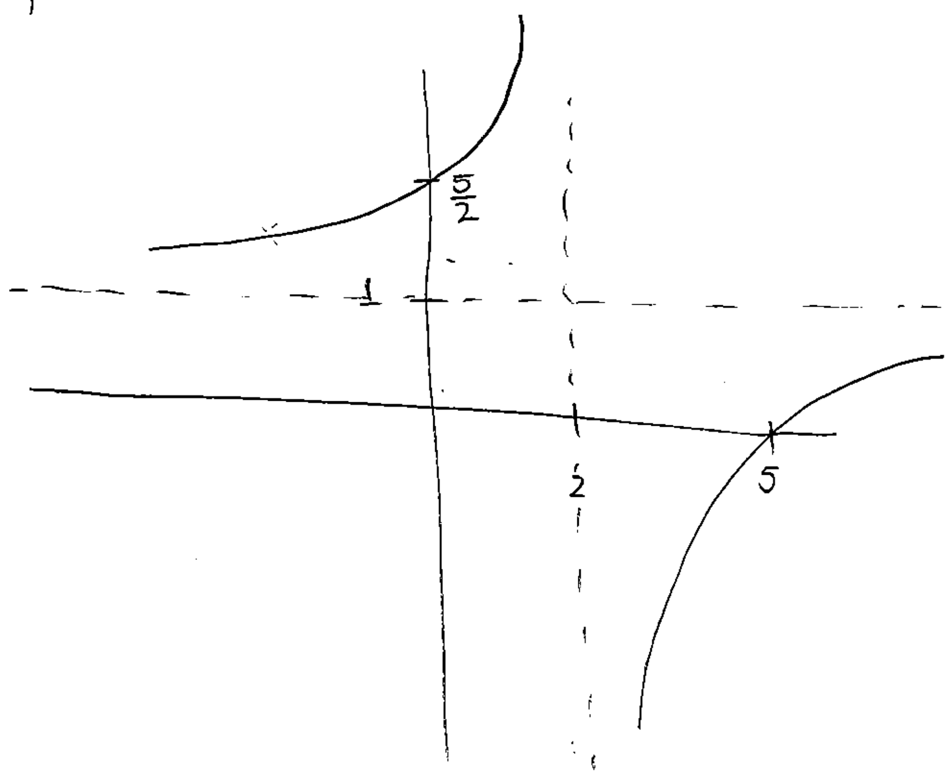
luego

$$\begin{aligned} Im\left(\frac{f}{g}\right) &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : \frac{f}{g}(x) = y \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : 1 + \frac{3}{2-x} = y \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : x = 2 - \frac{3}{y-1} \} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{1\} \,// \end{aligned}$$

Considerando

$$\phi(x) = 1 + \frac{3}{2-x}$$

su gráfica esta esbozada



(c) Note que

$$\left[h \circ \left(\frac{f}{g}\right)\right](x) = h\left(\frac{f}{g}(x)\right) = h\left(1 + \frac{3}{2-x}\right)$$

$$= \frac{-4}{\left(1+\frac{3}{2-x}\right) - 1}$$

$$= \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\setminus\{2\} \arrow[r, "\frac{f}{g}"] \arrow[dr, "h\circ\frac{f}{g}"'] & \mathbb{R}\setminus\{1\} \arrow[d, "h"] \\ & \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{tikzcd}$$

Cuyo dominio es

$$\operatorname{dom} h \circ \left(\frac{f}{g}\right) = \left\{ x \in \operatorname{dom}\frac{f}{g} \;\middle|\; \operatorname{Im}\frac{f}{g} \subseteq \operatorname{dom} h \right\}$$

$$\operatorname{dom} h\circ\left(\frac{f}{g}\right) = \left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \mid \frac{4}{3}x-\frac{8}{3} \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\right\}$$

$$= \left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \mid \frac{4x}{3}-\frac{8}{3} \neq 1\right\}$$

$$= \left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \mid x \neq \frac{11}{4}\right\}$$

$$= \mathbb{R}\setminus\left\{2, \frac{11}{4}\right\}$$

Además

$$\operatorname{Im} h\circ\left(\frac{f}{g}\right) = \left\{y\in\mathbb{R} \mid \exists\, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{2,\frac{11}{4}\right\} : \left(h\circ\frac{f}{g}\right)(x) = y\right\}$$

$$= \left\{y\in\mathbb{R} \mid \exists\, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{2,\frac{11}{4}\right\} : \frac{4}{3}x-\frac{8}{3} = y\right\}$$

$$= \left\{y\in\mathbb{R} \mid \exists\, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{2,\frac{11}{4}\right\} : x = \frac{3}{4}y+2\right\}$$

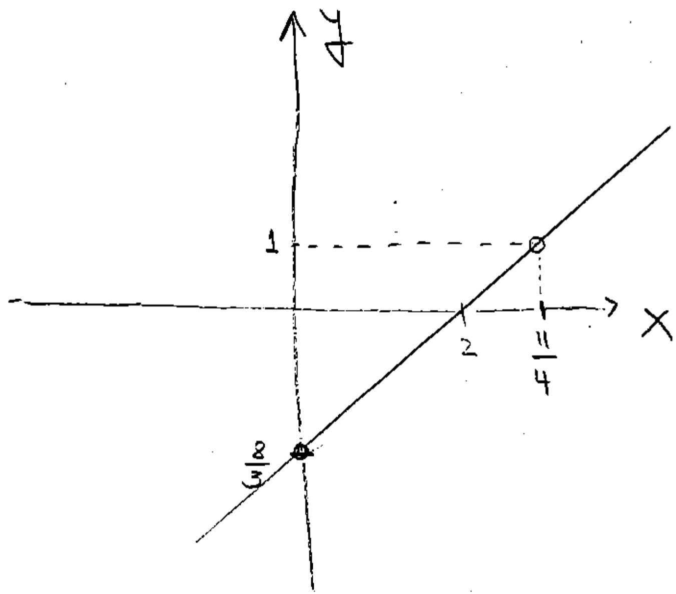
$$= \left\{y\in\mathbb{R} \mid \frac{3}{4}y+2 \neq 2,\ \frac{3}{4}y+2 \neq \frac{11}{4}\right\}$$

$$= \left\{y\in\mathbb{R} \mid y \neq 0,\ y \neq 1\right\}$$

$$= \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

Con respecto a la monotonía se tiene que $h\circ\left(\frac{f}{g}\right)$ es monótona creciente para todo $x\in \operatorname{dom} h\circ\left(\frac{f}{g}\right)$.

y un esbozo para su gráfica sería.



(d) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(2-x)$

$$= \frac{-4}{2-x-1} = \frac{4}{x-1}$$

donde

$$\operatorname{dom} h\circ g = \{ x \in \operatorname{dom} g \mid \operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{dom} h \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid 2-x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid 2-x \neq 1 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Además f es estrictamente decreciente pues dados $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tq

$$x < y$$

$$\Rightarrow \quad x - 1 < y - 1 \quad / (\,)^{-1}$$

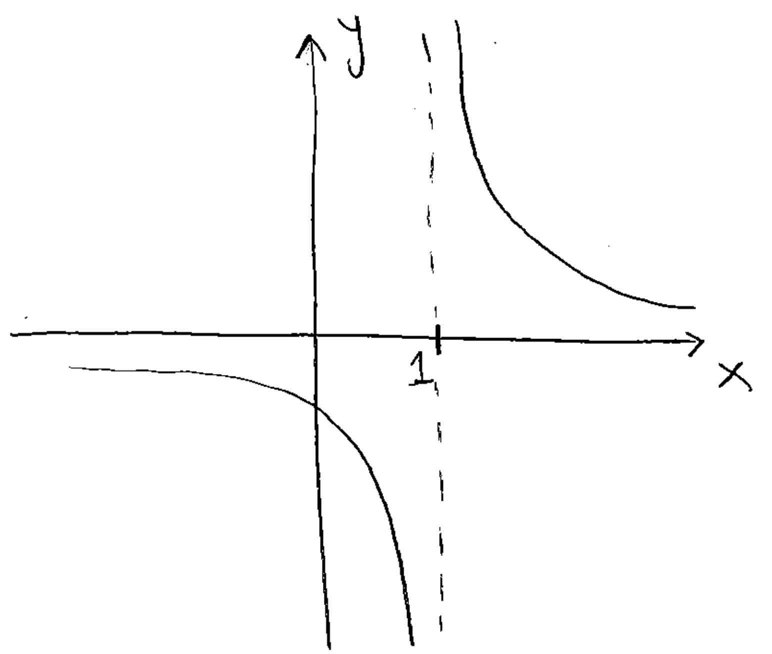
$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{y-1} \quad / \cdot 4.$$

$$\frac{4}{x-1} > \frac{4}{y-1}.$$

$$f(x) > f(y)$$

$$\therefore \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} //.$$

y su gráfica sería



3. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{1 - \dfrac{18}{2+x^2}}$

(a). PD: $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dem:

$$f(-x) = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+(-x)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x^2}} = f(x).$$

(b). Sean $x, y \in [0, \infty)$ tq

$$x < y \quad / ()^2$$

$$x^2 < y^2 \quad / +2$$

$$2 + x^2 < 2 + y^2 \quad / ()^{-1}$$

$$\frac{1}{2+x^2} > \frac{1}{2+y^2} \quad / \cdot -18$$

$$\frac{-18}{2+x^2} < \frac{-18}{2+y^2} \quad / +1$$

$$1 - \frac{18}{2+x^2} < 1 - \frac{18}{2+y^2} \quad / \sqrt[3]{\ }.$$

$$\sqrt[3]{1-\frac{18}{2+x^2}} < \sqrt[3]{1-\frac{18}{2+y^2}}$$

$$f(x) < f(y)$$

por tanto

$$x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

luego la Función es monótona creciente para $x \in [0,\infty)$.

(c)

$$\operatorname{Im} f = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{1-\frac{18}{2+x^2}} = y \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : \quad x^2 = -2 + \frac{18}{1-y^3} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid 1-y^3 \neq 0 \ , -2+\frac{18}{1-y^3} \geq 0 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1 \ , \frac{2(8+y^3)}{1-y^3} \geq 0 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1 \ , \frac{y+2}{1-y} \geq 0 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1 , y \in [-2,1) \}$$

$$= [-2,1) \,//$$

(d) por un lado, note que

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x^2}}$$

$\sqrt[3]{\cdot}$ es impar y monótona

$$\geq \sqrt{1-9} = -\sqrt{8}$$

$$= -2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq -2$$

y por otro lado

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - \frac{18}{2+x^2}} \leq 1$$

por lo tanto

$$-2 \leq f(x) \leq 1$$

Es decir f es una función Acotada.

Además f posee mínimo absoluto y está en $x=0$. mientras que NO posee máximo absoluto (divagar con valores grandes para x).