Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1er. semestre de 2019

Taller de ayudantía 5
Funciones y evaluación de funciones. Modelos cuadrático y afín

15/04/2019

En este taller, trabajaremos el concepto de función, donde se determinará el conjunto de valores reales donde las fórmulas propuestas (o regla de correspondencia) resultan un número real, como también se propone un ejercicio para evaluar funciones con ciertas expresiones algebraicas, pues es muy importante poder desarrollar evaluaciones en funciones para sus aplicaciones en contextos de la vida real. Finalmente, aplicaremos dos tipos especiales de función como son la función afín y la función cuadrática para modelar situaciones contextualizadas.

Objetivos:

- Determinar el dominio de una función.
- Evaluación de funciones.
- Modelar situaciones contextualizadas usando las funciones afín y cuadrática, respectivamente.

Ejercicios Propuestos

1. Determine el conjunto A de todos los números reales x para los cuales $f\colon A \to \mathbb{R}$, define una función, donde $f(x)$ se define mediante la fórmula:

   a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

   c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$.

   d) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

   a) Evalúe $f(-3), f(t^2), f(t+1), f(\sqrt{1+t^2})$ y $f(-t)$, donde t es un número real conocido.

   b) Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

   c) Escriba $f(x) = (x+c)^2 + d$, para ciertas constantes c y d en $\mathbb{R}$.

3. Se sabe experimentalmente, que la dilatación de una barra metálica es proporcional al aumento de temperatura que ella soporta. Se ha medido que su longitud es $76,4$[cm] a $20°C$ y $76,55$[cm] a $100°C$. A partir de esta información:

   a) Modele la longitud de la barra en [cm], en función de la temperatura en $°C$ a la que está sometida.

b) ¿Cuáles son las restricciones del modelo?

c) Determine la longitud de la barra a $-10°C$.

4. Se tiene un triángulo rectángulo con catetos de medida 3 [cm] y 4 [cm]. Se inscribe en él un rectángulo de modo que dos de sus lados adyacentes están sobre los catetos. Sean b y h las medidas de la base y altura del rectángulo inscrito, respectivamente.

   a) Modele la base b del rectángulo en función de su altura h.

   b) Modele el área del rectángulo en función de su altura h.

   c) Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en el triángulo.

Si quieres algo que nunca has tenido,
tendrás que hacer algo que nunca has hecho.

Solución Taller 5.

15/04/19.

1.-

(a) $A := \operatorname{dom} f. \qquad f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom} f &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}. \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0\} \\
&= [-1, 1]
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom} f &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{x-1} + \tfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0,\ x-2 \neq 0\} \\
&= \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$.

$$\begin{aligned}
\text{Dom} f &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}. \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{x^3+8} \right\} \\
&= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3+8 \neq 0 \} \\
&= \{ x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x^2-2x+4) \neq 0 \}. \\
&= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \ \vee \ (x-1)^2+2 \neq 0 \}. \\
&= \mathbb{R} \setminus \{-2\}
\end{aligned}$$

(d). $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$

$$\begin{aligned}
\text{Dom} f &= \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1} \in \mathbb{R} \}. \\
&= \{ x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0, \ x^2-1 \geq 0 \}. \\
&= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 1], \ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \} \\
&= \{-1, 1\}
\end{aligned}$$

2.- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

(a) $f(-3)=19$.

$f(t^2) = t^4-3t^2+1$.

$f(t+1) = (t+1)^2-3(t+1)+1$.

$f(\sqrt{1+t^2}) = (\sqrt{1+t^2})^2-3\sqrt{1+t^2}+1$.

$f(-t) = t^2+3t+1$.

(b) $f(x)>0 \iff x^2-3x+1>0$.

$$\Big(x-\underbrace{\Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)}_{\beta}\Big)\Big(x-\underbrace{\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)}_{\alpha}\Big)>0.$$

		α		β	
$x-\alpha$	$-$	0	$+$		$+$
$x-\beta$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$		$-$		$+$

Luego $f(x)>0$.

$\iff x\in\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$

(c) $f(x) = x^2-3x+1$.

$= x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1$.

$= (x-3/2)^2-\frac{5}{4}$ //.

Lugo $c=\frac{3}{2}$ y $d=\frac{-5}{4}$ //.

3.- $L \propto T \iff L - 76{,}4 = m(T-20)$

donde

$$m = \frac{76{,}4 - 76{,}55}{20 - 100} = \frac{3}{1600}$$

es decir

$$L = \frac{3}{1600}(T-20) + 76{,}4$$

$$\Rightarrow \quad L(T) = \frac{3}{1600}T + 76{,}3625 \quad //$$

(b) $L(T) \in \mathbb{R} \iff T \in \mathbb{R}$ pero la temperatura mínima absoluta es $-273°C$.

Luego $T \in (-273, \infty) \; //$

(c) $L(-10) = \frac{-30}{1600} + 76{,}3625$

$$= 76{,}3437 \; //$$

Es decir se dilató.