Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 4
Inecuaciones y polinomios
17/04/2019

Nombre: _____ **Curso:** _____

Debe entregar de forma grupal la solución de los 2 ejercicios que se presentan a continuación. El grupo debe tener como máximo cuatro integrantes.

Debe mantener su celular apagado y guardado durante el control.
tiempo: 40 minutos.

1. Considere los conjuntos A y B definidos de la siguiente manera:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x+1| < |x-5| + 2\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \leqslant x - 1 \right\}.$$

(i) Escriba los conjuntos A y B como intervalos. [4 ptos.]

(ii) Determine el conjunto $A \cap B$.
¿Es $A \cap B$ un conjunto acotado? Si su respuesta es afirmativa, determine una cota superior y una cota inferior. De ser negativa, justifique su respuesta. [2 ptos.]

Solución:

(i) Primero escribiremos el conjunto A como intervalo. Para ello, notamos que A es el conjunto solución de la inecuación:

$$|x+1| < |x-5| + 2.$$

Para resolver la anterior inecuación haremos uso de la siguiente Tabla 1, que indica el modo de reescribir los valores absolutos de la inecuación según el intervalo al que pertenezca el número real x:

	$x \in]-\infty, -1[$	$x \in [-1, 5[$	$x \in [5, +\infty[$
$\|x+1\|$	$-(x+1)$	$(x+1)$	$(x+1)$
$\|x-5\|$	$-(x-5)$	$-(x-5)$	$(x-5)$

Tabla 1.

1 punto.

Caso 1: $x \in]-\infty, -1[$.
Según la Tabla 1, en este caso se tiene:

$$\begin{aligned} |x+1| < |x-5|+2 &\iff -(x+1) < -(x-5)+2, \\ &\iff -1 < 7. \end{aligned}$$

Como la última equivalencia es cierta (es decir, $-1 < 7$), se sigue que la solución S_1 del Caso 1 es:

$$S_1 =]-\infty, -1[.$$

0.2 puntos.

Caso 2: $x \in [-1, 5[$.
Según la Tabla 1, en este caso se tiene:

$$\begin{aligned} |x+1| < |x-5|+2 &\iff (x+1) < -(x-5)+2, \\ &\iff 2x < 6, \\ &\iff x < 3. \end{aligned}$$

Luego la solución S_2 del Caso 2 es

$$S_2 = [-1, 5[\bigcap]-\infty, 3[= [-1, 3[.$$

0.2 puntos.

Caso 3: $x \in [5, +\infty[$.
Según la Tabla 1, en este caso se tiene:

$$\begin{aligned} |x+1| < |x-5|+2 &\iff (x+1) < (x-5)+2, \\ &\iff 1 < -3. \end{aligned}$$

Como la última equivalencia es falsa (es decir, es falso que $-1 < 3$), se sigue que la solución S_3 del Caso 3 es:

$$S_3 = \varnothing.$$

0.2 puntos.

Se concluye que la solución S_A de la inecuación $|x+1| < |x-5|+2$ es

$$S_A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty, 3[.$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$A =]-\infty, 3[.$$

0.4 puntos.

Se procede ahora a escribir el conjunto B como intervalo. Para ello, notamos que B es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \leq x-1.$$

Para dar solución a esta inecuación, consideraremos las siguientes condiciones que debe complir un número real x para ser parte del conjunto solución de la inecuación:

$$2x+1>0 \iff x > -\frac{1}{2},$$
$$x-1>0 \iff x>1.$$

Intersectando estas condiciones, se sigue que $x \in]1,+\infty[$.

0.5 puntos.

Se tiene ahora que si $x \in]1,+\infty[$ entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \leq x-1 &\iff \frac{1}{|2x+1|} \leq (x-1)^2, \\
&\iff \frac{1}{2x+1} \leq x^2-2x+1, \\
&\iff 1 \leq (2x+1)(x^2-2x+1), \\
&\iff 1 \leq 2x^3-3x^2+1, \\
&\iff 0 \leq x^2(2x-3), \\
&\iff 0 \leq 2x-3, \\
&\iff \frac{3}{2} \leq x.
\end{aligned}$$

1 punto.

Se concluye que el conjunto solución S_B de la inecuación $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} \leq x-1$ es:

$$S_B =]1,+\infty[\bigcap \left[\frac{3}{2},+\infty\right[= \left[\frac{3}{2},+\infty\right[.$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$B = \left[\frac{3}{2},+\infty\right[.$$

0.5 puntos.

(ii) Según el ítem anterior, se probó que $A =]-\infty,3[$ y que $B = \left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[$. Por lo tanto:

$$A \cap B =]-\infty,3[\bigcap \left[\frac{3}{2},+\infty\right[= \left[\frac{3}{2},3\right[.$$

1 punto.

Tenemos entonces que $A \cap B$ es un conjunto acotado, donde 4 (por ejemplo) es cota superior y 1 (por ejemplo) es cota inferior, ya que $1 \leq x \leq 4$ para todo $x \in A \cap B$.

1 punto.

2. Se sabe que la única raíz racional del polinomio

$$p(x) = -9x^3 + 9x^2 + x - 2$$

pertenece al intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

(i) Determine todas las raíces reales del polinomio $p(x)$. [4 Ptos.]

Solución:
Tenemos que el coeficiente, $a_0 = -2$, luego los divisores de a_0 son: ± 1, ± 2.

y $a_n = -9$, luego los divisores de a_n son: ± 1, ± 3, ± 9.

Por lo tanto las posibles raíces racionales de $p(x)$ son: $\pm\frac{1}{9}$, $\pm\frac{2}{9}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, ± 1, ± 2.

1.5 puntos.

Como $\frac{2}{3} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, de acuerdo al enunciado debe ser la raíz racional de $p(x)$, aplicando división sintética tenemos:

	-9	9	1	-2
		-6	2	2
2/3	-9	3	3	0

Figura 1: División sintética

Por lo tanto, $p(x) = (x - 2/3)(-9x^2 + 3x + 3) = -3(x - 2/3)(3x^2 - x - 1)$.

1.5 punto.

de donde, $3x^2 - x - 1 = 0$, como el discriminante resulta $13 > 0$, se tiene que las soluciones de la ecuación cuadrática son: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Por lo tanto las raíces reales del polinomio $p(x)$ son: $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

1 punto.

(ii) Descomponga el polinomio $p(x)$ como producto de polinomios de grado 1. [2 Ptos.]

Solución:
Usando (i) se tiene que:

$$p(x) = -9\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right).$$

2 puntos.