Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 3
Inecuaciones y conjuntos acotados
11/04/2019

Nombre: ______________________________ **Curso:** ______________

Elija sólo uno de los problemas que se presentan a continuación.
Duración: 20 minutos

1. Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; |4x+1| + x^2 - x < 5\right\}$.
   Del conjunto A, determine: cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen).

   Solución: Primero, determinamos el valor crítico de la expresión $4x+1$.
   $4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$. Analicemos los signos de tal expresión

	$x \leq -1/4$	$x > -1/4$
$4x+1$	$-$	$+$

[0,5 puntos.]

Ahora, analizaremos lo dos casos posibles.

Caso 1: Si $x \leq -\dfrac{1}{4}$, entonces $|4x+1| = -(4x+1)$. Reemplazando, obtenemos

$$-4x - 1 + x^2 - x < 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 < 0.$$

Para factorizar la expresión $x^2 - 5x - 6$ utilizaremos la fórmula de la ecuación de segundo grado. $x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ o $x_2 = 6$, luego $x^2 - 5x - 6 = (x - x_1)(x - x_2) < 0$. Analizando los signos de los factores,

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x > x_2$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 5x - 6$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la solución del caso 1 es $S_1 =]-1, 6[\bigcap \left]-\infty - \dfrac{1}{4}\right] = \left]-1, -\dfrac{1}{4}\right]$.

[2 puntos.]

Caso 2: Si $x > -\dfrac{1}{4}$, entonces $|4x+1| = (4x+1)$. Reemplazando, obtenemos

$$4x + 1 + x^2 - x < 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 < 0.$$

Para factorizar la expresión $x^2 + 3x - 4$ utilizaremos la fórmula de la ecuación de segundo grado. $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$ o $x_2 = 1$, luego $x^2 + 3x - 4 = (x - x_1)(x - x_2) < 0$. Analizando los signos de los factores,

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x > x_2$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$x^2 + 3x - 4$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, el conjunto solución del caso 2 es $S_2 =]-4,1[\bigcap \left]-\dfrac{1}{4}, \infty\right[= \left]-\dfrac{1}{4}, 1\right[$.

[2 puntos.]

Finalmente, el conjunto A corresponde a la unión de los dos casos, quedando $A =]-1,1[$.

[0,5 punto.]

El conjunto de cotas superiores de A es el conjunto $[1, \infty[$. El conjunto de cotas inferiores de A es el conjunto $]-\infty, -1]$, por lo tanto, el conjunto es acotado. Además, el supremos es 1 y el ínfimo es -1, como el supremo y el ínfimo no pertenecen al conjunto A, entonces no tiene máximo ni mínimo.

[1 punto.]

2. Sea $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \sqrt{x-1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\}$.
Del conjunto A, determine: cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen).

Solución: Para comenzar a resolver el problema, debemos asegurarnos que las expresiones de ambos lados nos entreguen números reales, por lo tanto, se debe cumplir

a) $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

b) $x > 0$.

Luego, para comenzar a resolver el problema se debe cumplir que $x \geq 1$.

[1 punto.]

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x-1} & \leq & \dfrac{1}{\sqrt{x}} & /()^2 \\ & & & \\ x-1 & \leq & \dfrac{1}{x} & / \cdot x \\ x^2 - x & \leq & 1 & /-1 \\ x^2 - x - 1 & \leq & 0 & \end{array}$$

[1 punto.]

Para factorizar la expresión $x^2 - x - 1$ utilizaremos la fórmula de la ecuación de segundo grado.
$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, luego $x^2 - x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) < 0$.

[1,5 puntos.]

Analizando los signos de los factores,

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x > x_2$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - x - 1$	$+$	$-$	$+$

[0,5 puntos.]

Por lo tanto, el conjunto H corresponde a

$$H = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right] \bigcap [1, \infty[= \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$$

[1 punto.]

El conjunto de cotas superiores de H es el conjunto $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[$. El conjunto de cotas inferiores de H es el conjunto $]-\infty, 1]$, por lo tanto, el conjunto es acotado. Además, el supremos es $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y el ínfimo es 1, como el supremo y el ínfimo pertenecen al conjunto H, entonces tiene como máximo el valor $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y como mínimo a 1.

[1 punto.]

3. Sea $I = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; \dfrac{(x-1)(x+1)}{(1-x)(2x^2+4x+2)} \leq 1 \;\wedge\; \dfrac{x^3-1}{x^2+x+1} > 1 \right\}$.
Del conjunto I, determine: cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen).

Solución: Para escribir el conjunto I como un intervalo, debemos resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(1-x)(2x^2+4x+2)} \leq 1$,

b) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1} > 1$.

Para resolver *a*) vamos a factorizar el denominar y encontraremos las restricciones de la inecuación. $2x^2+4x+2 = 2(x+1)^2$, por lo tanto,

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(1-x)(2x^2+4x+2)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{2(1-x)(x+1)^2} \leq 1,$$

luego x debe ser distinto de 1 y -1. Con esto en mente, podemos simplificar la última inecuación y obtenemos $\dfrac{-1}{2(x+1)} \leq 1$.

[1 punto.]

$$\frac{-1}{2(x+1)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{2(x+1)} \geq 0.$$

[0,5 puntos.]

Así, los puntos críticos son $x = -\dfrac{3}{2}$ y $x = -1$. Realizando la tabla de signos, obtenemos

	$x < -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} < x < -1$	$x > -1$
$x + \frac{3}{2}$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2x+3}{2(x+1)}$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la solución de la primera inecuación es $I_1 = \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \,]-1,1[\, \cup \,]1,\infty[$.

[1 punto.]

Para resolver la inecuación $b)$ también debemos factorizar el denominador y de esta manera encontraremos las restricciones de la inecuación. El polinomio cuadrático $x^2 + x + 1$ tiene discriminante negativo, por lo tanto, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales. Luego, la inecuación no tiene restricciones.

[1 punto.]

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 2.$$

Así, la solución de la inecuación $b)$ es $I_2 =]2, \infty[$.

[1 punto.]

Finalmente, el conjunto I corresponde a la intersección de I_1 e I_2, por lo tanto, $I =]2, \infty[$.

[0,5 puntos.]

El conjunto I no tiene cotas superiores ya que no es acotado superiormente, luego no tiene supremo ni máximo y no es acotado. El conjunto de cotas inferiores de I es el conjunto $]-\infty, 2]$, Además, el ínfimo es 2, pero como el ínfimo no pertenece a I, entonces no tiene mínimo.

[1 punto.]