



Control 2
Propiedades de orden de los números reales e inecuaciones
04/04/2019

Nombre: _____ Curso: _____

1. Alejandro y Mario son profesores particulares. Alejandro cobra a sus estudiantes \$2.000 de cargo fijo por visita más \$18.000 por hora cronológica cuando realiza una clase particular de “*Formas Modulares*”. Por otro lado, por hacer la misma clase, Mario cobra \$8.000 por hora cronológica más un cargo fijo de \$10.000 por visita.
Hoy Alejandro y Mario han trabajado la misma cantidad de horas, sin embargo, Alejandro visitó a tres estudiantes, mientras que Mario visitó a uno.
¿Cuántas horas por lo menos debieron trabajar para que, al final del día, Alejandro haya ganado una cantidad mayor o igual al doble de lo que ganó Mario?

Solución: Primero calcularemos el dinero que gana Mario. Él sólo le hace clases a un estudiante, entonces gana $8000x + 10000$, donde x corresponde a la cantidad de horas realizadas en el día.

[1 punto.]

Por otro lado, Alejandro realiza tres clases. Supongamos que al primer estudiante le hace x_1 horas, al segundo x_2 horas y al tercero x_3 horas, entonces, el dinero que gana Alejandro al final del día es

$$(2000 + 18000x_1) + (2000 + 18000x_2) + (2000 + 18000x_3) = 6000 + 18000(x_1 + x_2 + x_3)$$

[1 punto.]

Como Alejandro y Mario realizan la misma cantidad de horas al día, entonces $x_1 + x_2 + x_3 = x$.

[0,5 puntos.]

Ahora podemos escribir la inecuación que corresponde a la frase “Alejandro haya ganado una cantidad mayor o igual al doble de lo que ganó Mario”, la que está dada por

$$\begin{aligned} 6000 + 18000x &\geq 2(8000x + 10000) \\ 2000x &\geq 14000 \\ x &\geq 7 \end{aligned}$$

[3 puntos.]

Por lo tanto, se deben trabajar al menos siete horas para que se cumpla lo pedido.

[0,5 puntos.]

2. La ecuación que describe la posición con respecto al tiempo de una piedra lanzada hacia arriba, desde una altura h_0 y con una velocidad inicial v_0 , está dada por:

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

donde g representa la aceleración de gravedad y el tiempo t medido en segundos. Suponga que la piedra es lanzada desde una altura inicial $h_0 = 0,25[\text{m}]$ con velocidad inicial $v_0 = 10[\text{m/s}]$, y considere la aceleración de gravedad como $g = -10[\text{m/s}^2]$.

Determine todos los instantes de tiempo para los cuales la piedra no supera los 4 metros de altura.

Observación: La altura mínima del objeto es 0 metros, es decir, h no puede tomar valores negativos.

Solución: Para dar respuesta a este problema tenemos que resolver la inecuación

$$0 \leq 0,25 + 10t - 5t^2 \leq 4, \text{ donde } t \geq 0. \quad (1)$$

[1 punto.]

Primero vamos a resolver la inecuación $0,25 + 10t - 5t^2 \leq 4$, o equivalentemente,

$$20t^2 - 40t + 15 \geq 0.$$

A continuación, debemos determinar si la expresión de la izquierda de la inecuación se puede factorizar. Para factorizar la expresión cuadrática, debe tener solución la ecuación cuadrática $20t^2 - 40t + 15 = 0$. En este caso, el discriminante de la ecuación cuadrática es $400 > 0$, por lo tanto la ecuación cuadrática tiene dos soluciones, a saber

$$t = \frac{1}{2} \text{ o } t = \frac{3}{2}.$$

De esta manera, la expresión cuadrática se puede reescribir de la siguiente manera:

$$20t^2 - 40t + 15 = 20 \left(t - \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2} \right),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} 20t^2 - 40t + 15 &\geq 0 \\ (2t - 1)(2t - 3) &\geq 0. \end{aligned}$$

[1,5 puntos.]

Confeccionamos la tabla de signos con los dos factores encontrados y obtenemos

	$\left[0, \frac{1}{2}\right[$	$t = \frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$	$t = \frac{3}{2}$	$\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$
$(2t - 1)$	-	0	+	+	+
$(2t - 3)$	-	-	-	0	+
$(2t - 1)(2t - 3)$	+	0	-	0	+

Así, la expresión

$$(2t - 1)(2t - 3) \geq 0 \text{ para } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$

[0,5 puntos.]

Ahora resolvemos la inecuación

$$0 \leq 0,25 + 10t - 5t^2 \text{ con } t \geq 0. \quad (2)$$

La solución de lo anterior corresponde al conjunto $\left[0, \frac{10 + \sqrt{105}}{10}\right]$.

[2 puntos.]

Finalmente, la solución del problema corresponde a la intersección de las soluciones de las inecuaciones (1) y (2), es decir,

$$\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)\right) \cap \left[0, \frac{10 + \sqrt{105}}{10}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{10 + \sqrt{105}}{10}\right].$$

Los instantes de tiempo, para los cuales la piedra no supera los cuatro metros son los intervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{3}{2}, \frac{10 + \sqrt{105}}{10}\right]$.

[1 punto.]