**Universidad de Chile**
**Programa de Bachillerato**
**Matemáticas 1**
**1*er*. semestre de 2019**

# Taller de ayudantía 4
# Expresiones polinomiales, algoritmo de Euclides y factorización

**08/04/2019**

En este taller trabajaremos con polinomios, en particular aplicaremos el algoritmo de la división de Euclides para factorizarlos o escribirlos de una manera conveniente. Determinaremos sus raíces racionales y a partir de su factorización en factores irreductibles, determinaremos los valores donde la expresión polinomial satisface una relación de orden. La aplicación del teorema del resto nos permitirá resolver problemas en los que se requiere determinar un polinomio que satisface ciertas condiciones de divisibilidad.

### Objetivos:

1. Determinar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales.
2. Factorizar polinomios.
3. Determinar los números reales donde una expresión polinomial satisface una desigualdad.
4. Problemas aplicando el teorema del resto y el algoritmo de la división.

## Ejercicios Propuestos

1. Sean $x-2$ y $x+1$ factores de un polinomio $p(x)$ mónico de grado 3. Además al dividir el polinomio por $x-1$ se obtiene como resto 2.

   *a*) Determine el polinomio $p(x)$.
   *b*) ¿Es $c=-2$ una raíz de $p(x)$?
   *c*) Determine todas las raíces racionales de $p(x)$.

2. Un analista de mercado, que trabaja para un fabricante de aparatos pequeños, determina que si la empresa vende $x$ licuadoras anualmente, la ganancia total (en miles de pesos) está dada por la ecuación:
$$G(x) = 0,01(x^3 - 5x^2 - 44x - 60).$$
   ¿Cuántas licuadoras se deben vender como mínimo para que la empresa termine sin pérdidas?

3. Determine los números reales $k$ para los cuales $p(x) = kx^3 + x^2 - 3k^2 + 11$ es factorizable por $(x+2)$.

4. Sean 1 y 5 los restos que se obtienen al dividir el polinomio $p(x)$ por $x+2$ y $x-3$ respectivamente. Determine el resto que se produce al dividir $p(x)$ por $(x+2)(x-3)$.

**Opcional:** Descomponga el polinomio $p(x) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2$ en factores irreductibles y determine los números reales $x$ tales que $p(x) > (3x+2)$.

*Hay hombres que luchan un día y son buenos.*
*Hay otros que luchan un año y son mejores.*
*Hay quienes luchan muchos años, y son muy buenos.*
*Pero hay los que luchan toda la vida: esos son los imprescindibles.*

# Solución Taller 4.

1.- Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio mónico de grado 3.

Sabemos:

(i) $(x-2) \mid p(x) \Rightarrow p(2) = 0$.

(ii) $x+1 \mid p(x) \Rightarrow p(-1) = 0$.

(iii) $p(x) \div (x-1)$ tiene resto 2 $\Rightarrow p(1) = 2$.

Note que lo anterior es en virtud del teorema del resto, en efecto

$$p(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 0$$
$$4a + 2b + c + 8 = 0.$$

$$p(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c - 1 = 0$$

$$p(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + 1 = 2$$
$$a + b + c - 1 = 0.$$

es decir

$$\left.\begin{aligned} 4a+2b+c+8 &= 0 \\ a-b+c-1 &= 0 \\ a+b+c-1 &= 0 \end{aligned}\right| \quad b = 0.$$

Note que $b = 0$. y tenemos.

$$4a + c = -8$$
$$a + c = 1$$

$3a = -9$

$\boxed{a = -3}$

$\boxed{c = 4}$

Luego $a = -3$ y $c = 4$, por consiguiente

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Por otro lado, note que

$$p(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 4 = -16$$

$$\Rightarrow p(-2) \neq 0.$$

es decir $c = -2$ no es raíz de $p(x)$.

Ahora, para determinar las soluciones factorizamos el polinomio

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -3 | 0 | 4 |
| 2 | | 2 | -2 | -4 |
| | 1 | -1 | -2 | 0 |
| -1 | | -1 | 2 | |
| | 1 | -2 | 0 | |
| 2 | | 2 | | |
| | 1 | 0 | | |

Luego

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1).$$

Es decir el polinomio solo tiene por raices

$$x = -1 \quad , \quad x = 2 \ (\text{mult. } 2)$$

2.-

$$G(x) = 0{,}01\,(x^3 - 5x^2 - 44x - 60)$$

Note que para efectos prácticos no tener perdida es equivalente a tener ganancia nula o mayor. Luego

$$G(x) = 0 \Rightarrow 0{,}01(x^3 - 5x^2 - 44x - 60) = 0$$

para factorizar estudiaremos las raices racionales del polinomio, note que

$$\frac{div(a_0)}{div(a_n)} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60\}$$

además

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & -44 & -60 \\ 10 & & 10 & 50 & 60 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \\ -3 & & -3 & -6 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Es decir

$$G(x) = 0{,}01\,(x-10)(x+3)(x+2)$$

ahora, queremos los $x \in \mathbb{R}$ tq $G(x) \geq 0$
es decir,

$$0{,}01(x+2)(x+3)(x-10) \geq 0.$$

Estudiamos signos.

| | $-3$ | | $-2$ | | $10$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $+$ |
| $x-10$ | $-$ | | $-$ | | $-$ $0$ | $+$ |
| $\Pi$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | $+$ |

Luego $G(x) \geq 0 \iff x \in [-3,-2] \cup [10,\infty)$

Finalmente en virtud del problema $x \geq 0$ por lo tanto se deben fabricar al menos 10 Licuadoras.

3.- $$p(x) = Kx^3 + x^2 - 3K^2 + 11.$$

Note que

$$(x+2) \mid p(x) \Rightarrow p(-2) = 0.$$
$$\Rightarrow 3K^2 + 8K - 15 = 0$$
$$\Rightarrow 3\left(K + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{61}{3} = 0$$

Luego

$$K_1 = -\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{61}}{3}, \quad K_2 = -\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{61}}{3} \ //$$

4.- Sea $p(x)$ algún polinomio. n virtud del enunciado se tiene, por un lado.

(i) $p(-2) = 1$

(ii) $p(3) = 5$

y por otro lado,

(i) Existe $q_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ tq

$$p(x) = q_1(x)(x+2) + 1.$$

(ii) Existe $q_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ tq

$$p(x) = q_2(x)(x-3) + 5.$$

A causa de lo anterior se tiene

$$p(-2) = -5\, q_2(-2) + 5 = 1$$

$$p(3) = 5\, q_1(3) + 1 = 5.$$

Entonces

$$q_1(3) = \frac{4}{5} = q_2(-2),$$

es decir, por un lado, existe $t_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ tq

$$q_1(x) = (x-3)\, t_1(x) + \frac{4}{5}.$$

y por otro, Existe $t_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ tq

$$q_2(x) = (x+2)\, t_2(x) + \frac{4}{5}.$$

Luego se tiene

$$p(x) = (x-3)(x+2)\,t_1(x) + \frac{4}{5}(x+2) + 1$$

$$p(x) = (x-3)(x+2)\,t_2(x) + \frac{4}{5}(x-3) + 5$$

Es decir

$$p(x) = (x-3)(x+2)\,t_1(x) + r_1(x)$$
$$p(x) = (x+2)(x-3)\,t_2(x) + r_2(x)$$

donde

$$r_1(x) = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5} = r_2(x).$$

$$\Rightarrow \quad t_1(x) = t_2(x) \qquad (\text{alg. de Eucli})$$

por lo tanto el resto de dividir $p(x)$ entre $(x+2)(x-3)$ es

$$r(x) = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5} \quad //.$$