



Taller de ayudantía 3

Valor absoluto, inecuaciones, axioma del supremo y conjuntos acotados

01/04/2019

En este taller, analizaremos las condiciones y la resolución de inecuaciones que contengan términos cuadráticos, con raíces cuadradas, con valores absolutos y fracciones. Además, se presentan dos problemas de planteamiento, en el primero se debe modelar una inecuación utilizando el área de una caja y en el segundo se utiliza la interpretación del valor absoluto como distancia. Finalmente, se deben interpretar características del conjunto solución, como por ejemplo, si tiene ínfimo y/o supremo, si es acotado, etc.

Objetivos:

1. Aplicar la resolución de una inecuación de segundo grado a problemas contextualizados.
2. Resolver inecuaciones con raíces cuadradas, especificando las restricciones que éstas incluyen.
3. Resolver inecuaciones con valores absolutos, resolviendo paso a paso.
4. Aplicar el concepto asociado al valor absoluto.
5. Interpretar el conjunto solución, identificando los conceptos de cota superior e inferior, supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

Ejercicios Propuestos

1. Se formará una caja abierta a partir de un rectángulo de lados 12 y 20 metros respectivamente. Para formar esta caja se recortarán cuadrados de lado x en cada esquina del rectángulo (ver figura). Encontrar para qué valores de x el área de la caja es mayor o igual a $192 [m^2]$.



2. Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} |x + 1| + |x - 1| &\leq 2 \\ \sqrt{x + 1} &> \sqrt{2x} \end{aligned}$$

- a) ¿Es el conjunto solución acotado?
- b) Determine el conjunto de cotas superiores e inferiores, y encuentre el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si es que existen.
3. Determine todos los números reales tales que, el triple de ellos menos 7 están a una distancia a lo más 8 de su cuadrado.
4. **Opcional:** Reescribiremos en una forma conveniente una expresión cuadrática y la utilizaremos para establecer resultados de desigualdades.
- a) Determine los números reales h y k tales que $-2x^2 + x - 1 = -2(x - h)^2 + k$ y encuentre el menor número real c tal que

$$-2x^2 + x - 1 \leq c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- b) Determine los números reales x que satisfacen la siguiente inecuación

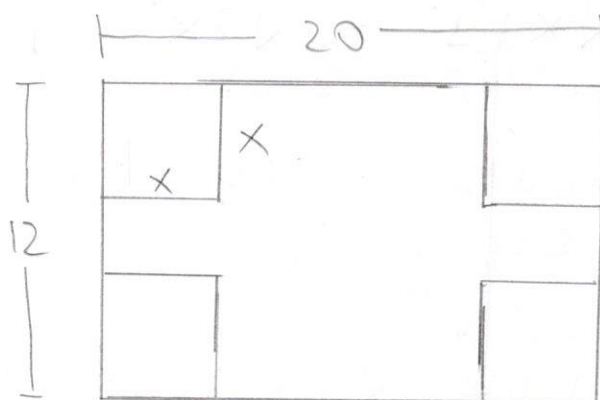
$$\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x} \geq -1.$$

La perseverancia es la base de todas las acciones.

Solución Taller 3.

1.-

Note que x representa el lado de cada cuadrado, Entonces el Área de la caja está dada por



$$A = 240 - 4x^2$$

Luego, queremos que $A \geq 192$, es decir

$$240 - 4x^2 \geq 192$$

$$x^2 \leq 12$$

$$x^2 - 12 \leq 0$$

$$(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12}) \leq 0$$

Luego el conjunto solución de la inecuación es

$$\text{Sol} = [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$$

	$-\sqrt{12}$	$\sqrt{12}$	
$x - \sqrt{12}$	-	- 0 +	
$x + \sqrt{12}$	- 0 +	+	
	+	-	+

Finalmente como x representa el lado del Cuadrado se tiene que $x \geq 0$ por lo tanto.

$$x \in [0, \sqrt{12}] //$$

$$2- \begin{cases} |x+1| + |x-1| \leq 2 \\ \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2x} \end{cases}$$

Sol: Comenzaremos resolviendo cada ecuación por separado

$$(i) |x+1| + |x-1| \leq 2$$

Estudiar los signos

	$-\infty$	-1	1	∞
$x+1$		$-$ 0 $+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$ 0 $+$	
		I	II	III

Luego se distinguen tres casos:

(i) caso I: $x \in (-\infty, -1]$, entonces

$$-(x+1) + -(x-1) \leq 2$$

$$-2x \leq 2$$

$$x \geq -1$$

Luego la solución esta dada por

$$S_1 = \{-1\}$$



(ii) Caso II: si $x \in (-1, 1)$, entonces.

$$(x+1) + -(x-1) \leq 2$$

$$2 \leq 2$$

Luego lo anterior no depende del x , por lo tanto.

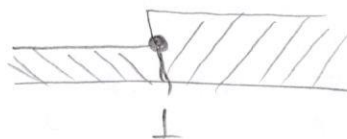
$$S_2 = (-1, 1)$$

(iii) Caso III: si $x \in [1, \infty)$, entonces.

$$(x+1) + (x-1) \leq 2$$

$$2x \leq 2$$

$$x \leq 1$$



Luego, la solución esta dada por

$$S_3 = \{1\}$$

Finalmente la solución final para la primera iteración es

$$Sol_1 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$= \{-1\} \cup (-1, 1) \cup \{1\}$$

$$= [-1, 1]$$

por otro lado, se tiene

$$(ii) \sqrt{x+1} > \sqrt{2x}$$

note que lo anterior está definido si

$$(i) x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$(ii) 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

es decir para los x que satisfacen $x \geq 0$.

Luego elevando al cuadrado.

$$x+1 > 2x.$$

$$\Rightarrow x < 1$$

es decir el conjunto solución para la segunda solución es

$$Sol_2 = Sol_1 \cap Rest.$$

$$= (-\infty, 1) \cap (0, \infty)$$

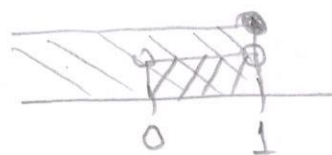
$$= (0, 1).$$

Finalmente el conjunto solución para el sistema de inequaciones está dado por

$$Sol_f = Sol_1 \cap Sol_2$$

$$= [-1, 1] \cap (0, 1)$$

$$= (0, 1].$$



(a) S_f , pues es acotado inferiormente por $x=0$ y superiormente por $x=1$.

(b) Note que

$$C_i = (-\infty, 0] \quad \text{Cotas inferiores}$$

$$C_s = [1, \infty) \quad \text{Cotas superiores.}$$

$$\inf S_{of} = \inf (0, 1] = 0.$$

$$\sup S_{of} = \sup (0, 1] = 1.$$

$$\min S_{of} = \min (0, 1] = \text{no tiene pues}$$

$$\max S_{of} = \max (0, 1] = 1. \quad 0 \notin (0, 1]$$

$$3.- \text{ Sea } x \in \mathbb{R} \text{ tq } d(3x-7, x^2) \leq 8.$$

Ddo:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

es decir lo anterior es equivalente a

$$|3x - 7 - x^2| \leq 8.$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3x + 7| \leq 8$$

$$\Rightarrow \left| \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \right| \leq 8, \quad | \cdot | > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 7 \leq 8.$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0.$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2} \right) \left(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right) \leq 0.$$

Luego la solución de la inecuación es

$$\text{Sol} = \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right], //$$

	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
$x - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2} \right)$	-	0	+
$x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)$	-	-	0
	+	-	+

Es decir los números reales que satisfacen lo anterior son aquellos que están en

$$\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right] //$$