

Solución Taller 2.

1 (a). $\forall a, b \in [0, \infty) \Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

dem: Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y note que

$$0 \leq ab$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 0 \leq a+b \leq a+2\sqrt{ab}+b$$

$$\Rightarrow 0 < (\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \forall a, b \in [0, \infty).$$

Luego la proposición es cierta.

(b) Si $|x-3| < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$.

dem: como

$$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \quad | +3$$

$$\Rightarrow 2 < x < 4 \quad | +4$$

$$\Rightarrow 6 < x+4 < 8 \quad | \cdot^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6} //$$

2.-

$$U(x) = (120 - x)(x - 20)$$

Note que nos piden los $x \in [0, \infty)$ tq

$$U(x) > 1600$$

$$\Rightarrow (120 - x)(x - 20) > 1600$$

$$\Rightarrow -x^2 + 140x - 4000 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 140x + 4000 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 40)(x - 100) < 0$$

Luego, analizamos signos:

	40	100
$x - 40$	-	+
$x - 100$	-	+
$(x - 40)(x - 100)$	+	-

Ahora, en virtud de lo anterior se tiene que

$$x \in (40, 100)$$

Finalmente el precio de venta para lo requerido debe variar entre los \$40.000 y \$100.000.

3.- $I_A = (5-2x)^2$, $I_B = (x+3)^2$

x : Cantidad de artículos vendidos

Note que nos piden los $x \in [0, \infty)$ tq

$$I_B > I_A$$

$$\Rightarrow (5-2x)^2 < (x+3)^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow |5-2x| < |x+3|$$

$$\Rightarrow |5-2x| - |x+3| < 0$$

estudiamos casos.

	-3	5/2
$5-2x$	+	+
$x+3$	-	+
	(i)	(ii)

(i) Si $x \in (-\infty, -3]$ se tiene

$$(5-2x) + (x+3) < 0$$

$$\Rightarrow 8 - x < 0$$

$$\Rightarrow x > 8$$

Luego. $S_1 = (8, \infty) \cap (-\infty, -3] = \emptyset$

(ii) si $x \in (-3, \frac{5}{2}]$ se tiene

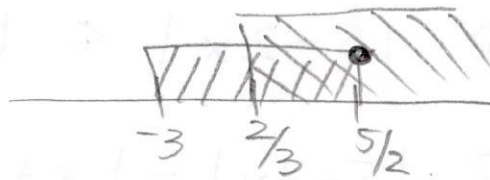
$$(5 - 2x) - (x + 3) < 0.$$

$$\Rightarrow 2 - 3x < 0.$$

$$\Rightarrow x > \frac{2}{3}.$$

Luego.

$$S_2 = \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \cap \left(-3, \frac{5}{2}\right] \\ = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right]$$



(iii) si $x \in (\frac{5}{2}, \infty)$ se tiene

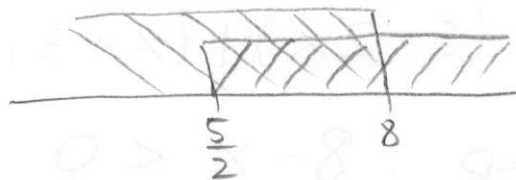
$$-(5 - 2x) - (x + 3) < 0.$$

$$\Rightarrow x - 8 < 0$$

$$\Rightarrow x < 8.$$

Luego.

$$S_3 = (-\infty, 8) \cap \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \\ = \left(\frac{5}{2}, 8\right)$$



Finalmente.

$$Sol_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

$$= \emptyset \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, 8\right) = \left(\frac{2}{3}, 8\right) //$$

por lo tanto la cantidad de artículos fluctúan entre 1 y 8 para que los Ingresos de B superen los de A.

4:

$$(i) \frac{1-2x}{x+3} \leq -1$$

$$(ii) \frac{x}{3} - 4 \leq \frac{x}{4} - 3$$

Sol: Note que de (i) se tiene

$$\frac{1-2x}{x+3} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4-x}{x+3} \leq 0, \quad x \neq -3$$

Estudiamos signos:

	-3	4	
$4-x$	+	+	-
$x+3$	-	+	+
$(4-x)(x+3)$	+	+	-

Luego.

$$S_1 = (-\infty, -3) \cup [4, \infty)$$

por otro lado de (ii) se tiene

$$\frac{x}{3} - 4 \leq \frac{x}{4} - 3$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq 12$$

Luego

$$S_2 = (-\infty, 12]$$

Finalmente el conjunto solución del sistema está dado por

$$\text{Sol} = S_1 \cap S_2$$

$$= [(-\infty, -3) \cup [4, \infty)] \cap (-\infty, 12]$$

$$= (-\infty, -3) \cup [4, 12]$$

