Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1er. semestre de 2019

Taller Matemáticas G
Nivelación Matemáticas Regular

Trabajo en Clases (no presencial)
Inecuaciones valor absoluto y Polinomios

20/04/2019

(1.a) Considere los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, |2x-5| \leqslant \left| \frac{3x+4}{5} \right| \right\}, \\ H &= \{ x \in \mathbb{R} :\, |4-x| + |2x-5| < 7-x \}. \end{aligned}$$

(i) Escriba los conjuntos A y B como intervalos.

(ii) Muestre que el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que estén en A y en B es $\left[\frac{21}{13}, 4\right[$.

(iii) A partir de el ítem anterior, determine los conjuntos de cotas superiores y cotas inferiores. Además encuentre (si existen) supremo e ínfimo y máximo y mínimo del conjunto $\left[\frac{21}{13}, 4\right[$.

(1.b) Considere los conjuntos A y B definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{R} \,:\, |x+1| < |x-5| + 2 \}, \\ B &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \leqslant x-1 \right\}. \end{aligned}$$

(i) Escriba los conjuntos A y B como intervalos.

(ii) Determine el conjunto de los números reales que están tanto en A como en B. ¿Tal conjunto es acotado? Si su respuesta es afirmativa, determine una cota superior y una cota inferior, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de tal conjunto. De ser negativa, justifique su respuesta.

(2.b) Mario ha contratado un servicio de telefonía fija en su casa. La empresa que proporciona el servicio le indicó a Mario que la instalación será mañana y que la hora de llegada del técnico dista en menos de una hora de las 17:00 pm. Mario, en su apuro por solucionar este problema, pregunta cuánto tarda el técnico en la instalación del servicio, a lo que la empresa informa que son menos de treinta minutos. ¿En qué rango de hora el técnico terminará la instalación?

(2.a) ¿Cuál es el conjunto de aquellos números reales tales que cuyo doble de su cuadrado dista en al menos una unidad de sí mismo?

(3.a) Considere el polinomio

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 - x + 1.$$

El objetivo de este ejercicio es determinar un algoritmo que permita dividir $p(x)$ con $(x+1)$.

(i) Encuentre un polinomio $a(x)$ con coeficientes reales tal que

$$p(x) = a(x)(x+1) + (x^3 - x + 1).$$

(ii) Encuentre un polinomio $b(x)$ con coeficientes reales tal que

$$(x^3 - x + 1) = b(x)(x+1) + (-x^2 - x + 1).$$

(iii) Encuentre un polinomio $c(x)$ con coeficientes reales tal que

$$(-x^2 - x + 1) = c(x)(x+1) + 1.$$

Concluya que $p(x) = (x+1)\big(a(x) + b(x) + c(x)\big) + 1$.

(iv) ¿Existe un polinomio $d(x)$ con coeficientes reales que cumpla

$$p(x) = (x+1)\big(a(x) + b(x) + c(x) + d(x)\big)?$$

¿Por qué?

(3.b) Considere el polinomio

$$p(x) = 4x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 9x^2 - x + 3.$$

(i) Demuestre que al dividir $p(x)$ por x^2+1 se obtiene resto cero. Si pasa lo anterior, decimos que x^2+1 *divide* a $p(x)$ y se denota por $(x^2+1)|p(x)$.

(ii) Encuentre todas las raíces reales del polinomio $p(x)$, es decir, todos aquellos números reales c que al reemplazarlos por la variable x se obtiene la igualdad con cero.

Opcionales

1. Para los siguientes casos, determine los números reales k para que el polinomio $q(x)$ sea un factor del polinomio $p(x)$:

   (i) $p(x) = kx^3 + x^2 - 3k^2 + 11, \quad q(x) = x + 2.$

   (ii) $p(x) = x^3 - 4kx + 3, \quad q(x) = x - 1.$

2. Determine el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + 4$, sabiendo que es divisible por $x+2$ y que los restos al dividirlo por $x+1$ y $x+3$ son iguales.

3. Dado el polinomio $p(x) = (a-1)\,x^n + (b \cdot n)\,x^{n-1} + x - 2$ para $n \in \mathbb{N}$ un número fijo, determine a y b de modo que $p(x)$ sea divisible por $x^2 - 3x + 2$.

   Hint: Factorice el polinomio $x^2 - 3x + 2$.

4. (i) Determine el(los) valor(es) de k para el(los) cual(es) el polinomio $q(x) = x + 1$ divide a $p(x) = x^3 + k^2x^2 - 4kx + 5$.

   (ii) Reemplace el(los) valor(es) de k encontrado(s) anteriormente y encuentre las raíces reales de $p(x)$ si estas existen.

5. Factorice completamente el polinomio $p(t) = t^3 - 35t^2 + 252t + 288$.