Control 14 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Viernes 04 de Enero, 2019

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Indique si la siguiente integral $\int_0^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx$, converge o diverge, justifique.

   Solución:

   Sean $f(x) = \frac{1}{x+e^{2x}}$ y $g(x) = \frac{1}{e^{2x}}$, funciones continuas y positivas tal que:
   $0 < e^{2x} \leq x + e^{2x}$, es decir, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq 0$.

   $\boxed{\text{3 puntos.}}$

   Por otra parte,
   $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \displaystyle\int_0^b e^{-2x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} -0.5e^{-2x}\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} -0.5e^{-2b} + 0.5 = 0 + 0.5 = 0.5$

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   Por lo tanto $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ converge, de esta manera $\int_0^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx$, converge.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$x^3\,y' - xy = e^{-\frac{1}{x}}$$

con $y(1) = 0$.

Solución:

Ecuación lineal de primer orden, tenemos:

$$y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Factor integrante: $e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\frac{1}{x^2}\,dx} = e^{\frac{1}{x}}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

$$\Rightarrow \;\; y'(x)e^{\frac{1}{x}} + y(x)\cdot -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \;\; (y(x)e^{\frac{1}{x}})' = \frac{1}{x^3} \;\; / \int dx$$

$$\Rightarrow \; y(x)e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Evaluando $y(1) = 0$, tenemos que: $0 = -\frac{1}{2} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por lo tanto,

$$y(x) = e^{-\frac{1}{x}}(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}), \quad x \neq 0.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$