Control 12 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Viernes 21 de Diciembre, 2018

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Calcule el área A de la región acotada por el gráfico de:

   $f(x) = e^{-\sqrt{x}}, \;\; x \geq 0,$ y las rectas $\; y = 0, \;\; x = 0, \;\; x = b, \;$ con $\; b > 0.$

   ¿Qué ocurre con el valor A del área de la región, a medida que b crece?

   Solución:

   Como f es positiva para todo $\; x \geq 0,$ tenemos que el área de la región está dada por:

$$A = \int_0^b \; e^{-\sqrt{x}} \, dx.$$

$$\boxed{0.5 \text{ punto.}}$$

   Primero resolvamos la integral indefinida:

   sea $u = -\sqrt{x} \;\; \Rightarrow \;\; dx = 2u \, du$

$$\int \; e^{-\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \; u \, e^{u} \, du.$$

$$\boxed{0.5 \text{ punto.}}$$

   Aplicando integración por parte:

   $z = u \;\; \Rightarrow \;\; dz = du, \;\;\; dv = \; e^{u} \, du \;\; \Rightarrow \;\; v = e^{u}.$

$$\boxed{\text{0.5 punto.}}$$

Quedando:

$$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int u\,e^{u}\,du = 2\left(u\,e^{u} - \int e^{u}\,du\right) = 2\,(u\,e^{u} - e^{u}) = 2\,e^{-\sqrt{x}}\,\left(-\sqrt{x}-1\right) + C.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

De esta manera el área nos queda:

$$A = 2\,e^{-\sqrt{x}}\,\left(-\sqrt{x}-1\right)\Big|_{0}^{b} = 2\,\left(e^{-\sqrt{b}}\,\left(-\sqrt{b}-1\right)+1\right)\,[u^2].$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Además,

$$\lim_{b\to+\infty} A = \lim_{b\to+\infty} 2\,\left(-e^{-\sqrt{b}}\,\left(\sqrt{b}+1\right)+1\right).$$

$$\boxed{\text{0.5 punto.}}$$

Por otra parte, tenemos que:

$\lim_{b\to+\infty}\ \sqrt{b}+1 = +\infty,\quad \lim_{b\to+\infty}\ e^{\sqrt{b}} = +\infty,$

$$\boxed{\text{0.5 punto.}}$$

Así, aplicando regla de l'hopital, tenemos que:

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\sqrt{b}+1}{e^{\sqrt{b}}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{b}}}{e^{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{b}}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{b}}} = 0.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Por lo que:

$$\lim_{b\to+\infty} A = 2\,[u^2].$$

$$\boxed{\text{0.5 punto.}}$$

2. Determine el volumen del sólido que se forma al girar la Región "R", acotada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-2x}$, las rectas $x = 0$, $x = b$ con $b > 0$ y el eje X, cuando esta gira alrededor del eje X.

¿Qué ocurre con el valor del volumen a medida que b crece?

Solución:

$$V = \pi \int_0^b x\, e^{-4x}\, dx.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Primero resolvamos la integral indefinida, aplicando integración por parte:

$u = x \;\Rightarrow\; du = dx, \quad dv = e^{-4x}\, dx \;\Rightarrow\; v = \frac{e^{-4x}}{-4}.$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Quedando:

$$\int x\, e^{-4x}\, dx = -\frac{x}{4}\, e^{-4x} + \frac{1}{4} \int e^{-4x}\, dx = -\frac{x}{4}\, e^{-4x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-4x}}{-4} = -\frac{1}{4}\, e^{-4x} (x + \frac{1}{4}) + C.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

De esta manera el volumen nos queda:

$$V = -\pi\, \frac{1}{4}\, e^{-4x} (x + \frac{1}{4}) \Big|_0^b = \pi \left(-\frac{1}{4}\, e^{-4b} (b + \frac{1}{4}) + \frac{1}{16} \right) \; [u^3].$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Además,

$$\lim_{b \to +\infty} V = \lim_{b \to +\infty} \pi \left(-\frac{1}{4}\, e^{-4b} (b + \frac{1}{4}) + \frac{1}{16} \right).$$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Por otra parte, tenemos que:

$\lim_{b\to+\infty}\ b+1/4=+\infty,\quad \lim_{b\to+\infty}\ e^{4b}=+\infty,$

$\boxed{0.5 \text{ punto.}}$

Así, aplicando regla de l'hopital, tenemos que:

$$\lim_{b\to+\infty}\ \frac{b+1/4}{e^{4b}}=\lim_{b\to+\infty}\ \frac{1}{e^{4b}\cdot 4}=0.$$

$\boxed{1 \text{ punto.}}$

Por lo que:

$$\lim_{b\to+\infty} V=\frac{\pi}{16}\,[u^3].$$

$\boxed{0.5 \text{ punto.}}$