Taller 15 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Enero, 2019

En este taller profundizaremos el estudio de un tipo especial de funciones llamadas sucesiones las cuales abordamos al inicio del semestre, recordemos que utilizamos la notación a_n para representarlas y nos focalizamos en determinar la suma de los n primeros términos de ésta, denotada por S_n. Se analizaron algunas sumas particulares (sumas notables) como la suma telescópica, la suma geométrica y otras. Extenderemos nuestro estudio de sumatorias a sumas infinitas, denominadas series y aplicarás algún criterio para analizar su convergencia.

Objetivos:

- Analizar la convergencia de una sucesión.
- Analizar la convergencia de algunas series como: Geométrica, Telescópica, u otras.
- Resolver problemas contextualizados aplicando series notables.

Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes sucesiones convergen ($n \in \mathbb{N}$):

   a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$

   b) $a_n = \frac{n^2-3n+3}{9n^2-25n+18}$

   c) $a_n = \frac{2}{3^n}\left(1 - \frac{2^n}{5^n}\right).$

   d) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n}.$

2. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes series. Justifique su respuesta en cada caso.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{2^n+3^n}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n(n+2)}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}.$

3. Al unir los puntos medios de los lados de un cuadrado, se forma un nuevo cuadrado. Si este proceso de formación de cuadrados se continuara indefinidamente.

   Determinar:

a) una expresión para la longitud del lado, del cuadrado n-ésimo, si la longitud del lado del primer cuadrado es de 20 cm.

b) la suma de los perímetros de todos los cuadrados que se pueden formar en este proceso, incluyendo el primero, cuyo lado es de longitud 20 cm.

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y por qué.

    a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, converge.

    b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000(n+1)}$ diverge.

    c) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, converge entonces a_n converge.