TALLER 14 de MATEMATICAS 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Diciembre 2018

Ecuación Diferencial lineal de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

Para determinar la familia de funciones $y(x)$ que satisfacen esta ecuación seguimos el siguiente procedimiento:

Dado que: $\left[e^{\int p(x)dx} y(x)\right]' = e^{\int p(x)dx} p(x)y(x) + e^{\int p(x)dx} y'(x)$

se obtiene:

$$\left[e^{\int p(x)dx} y(x)\right] = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

luego:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Objetivos de Aprendizajes

- Resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Resolver problemas aplicando ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Ejercicios:

1) Halle la solución general de:

a) $y'(x) - 2y(x) = -3e^{-5x}$

b) $y'(x) - 4y(x) = 9x - 6$ (★)

c) $y'(x) - tg(x)y(x) = 1$

d) $\dfrac{dr}{d\theta} + tg(\theta)r(\theta) = \sec(\theta)$

e) $\dfrac{dy}{dx} + xy(x) = 100x$ (★)

f) $y'(x) - 4x(x) = e^{x}, \quad y(0) = 1$

2) (★) Un recipiente contiene $55m^3$ de una solución compuesta por 85% de agua y 15% de alcohol. Una segunda solución, compuesta por un 60% de agua y un 40% de alcohol, entra al recipiente a razón de $12m^3$ por minuto. Al mismo tiempo la solución del recipiente fluye hacia afuera a un ritmo de $16m^3$ por minuto. Modele una función que describa el volumen de alcohol contenido en el recipiente en cada instante t. ¿Cuál es la concentración de alcohol de la solución del tanque justo un minuto antes de quedar vacío el recipiente?

3) Suponga que $f(x)$ es solución de $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ (1), donde $a(x)$ es una función real.

Suponga además que g es solución de $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ (2), donde $b(x)$ es una función real.

a) Demuestre que $f(x) + g(x)$ es solución de la ecuación diferencial (2).

b) Demuestre que si $h(x)$ es solución de la ecuación diferencial (2) entonces $g(x) - h(x)$ es solución de la ecuación diferencial (1).

c) Demuestre que cualquier solución de la ecuación diferencial (2) se puede escribir de la forma $f(x)+g(h)$ donde $f(x)$ es solución de la ecuación diferencial (1) y $g(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial (2).

4) Resuelva la ecuación diferencial:

$$y'(t)+\frac{4y(t)}{200+t}=\frac{5}{2}.$$

5) Resuelva la ecuación diferencial: $y'(x)-2y(x)=2e^{x}$.