TALLER 13 de MATEMATICAS 2
Programa de Bachillerato. Universidad de Chile

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden de Variables Separables

Se llama ecuación diferencial de primer orden de variables separables a una ecuación diferencial de la forma: $y'(x) = f(x)\, g(y)$ $\quad (1)$.

Para determinar la familia de funciones $y(x)$ que satisfacen esta ecuación debemos seguir el siguiente procedimiento:

Primero:

Se determina el conjunto de números reales y_0 para los cuales $g(y_0) = 0$. Si $g(y_0) = 0$ entonces $y(x) = y_0$ (función constante igual a y_0), es una solución de la ecuación, llamada **solución de equilibrio**.

Segundo:
En seguida se busca el resto de las soluciones $y(x)$ para las cuales $g(y) \neq 0$. Para ello se procede del siguiente modo:

a) Se divide ambos lados de la ecuación (1) por $g(y)$ obteniendo: $\frac{1}{g(y)}\, y'(x) = f(x)$.

b) Se Integra con respecto a x a ambos lados de la igualdad y considerando que: $\int \frac{1}{g(y)}\, y'(x)dx = \int \frac{1}{g(y)} dy$ se obtiene: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx$

c) Se resuelve ambas primitivas, incluyendo la constante de integración y si se puede se despeja $y(x)$ en función de x.

Ejercicio Ilustrativo:
Determine el conjunto solución de la ecuación diferencial: $z'(t) = (z-2)(1+t^2)$.

Solución:

Observemos que la incógnita de la ecuación es la función $z(t)$ y que es una ecuación diferencial de variables separables, pues $z'(t) = g(z)\, f(t)$, donde $g(z) = (z-2)$ y $f(t) = (1+t^2)$.

De acuerdo con el procedimiento antes indicado:

I.- Primero determinemos los valores de z para los cuales $g(z) = (z-2) = 0$. La solución es $z(t) \equiv 2$, por lo tanto la función constante igual a 2 es la solución de equilibrio de la ecuación diferencial.

II.- Se buscan soluciones de la ecuación tales que $z(t) > 2$ o $z(t) < 2$ para todo $t \in Dom(z)$.

a) Se divide la ecuación por la función $(z-2)$:

$$\frac{1}{z-2} z'(t) = 1 + t^2 .$$

b) Integrando con respecto a t ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{1}{(z-2)} z'(t)dt = \int (1+t^2)dt$$

Como $dz = z'(t)dt$ se tiene que: $\int \frac{1}{(z-2)} z'(t)\,dt = \int \frac{1}{z-2}\,dz$

c) Resolviendo ambas primitivas:

$$\int \frac{1}{(z-2)} dz = \int (1+t^2)dt \Leftrightarrow \ln|z-2| = t + \frac{t^3}{3} + C \Leftrightarrow |z-2| = e^C e^{\left(t+\frac{t^3}{3}\right)}$$

De este modo:

Si $z(t) > 2$ entonces $|z-2| = z-2$ y por lo tanto : $z(t) = 2 + e^C e^{\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)}$.

Si $z(t) < 2$ entonces $|z-2| = 2-z$ y por consiguiente: $z(t) = 2 - e^C e^{\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)}$.

Podemos expresar el conjunto solución de la ecuación mediante: $z(t) = 2 + Me^{\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)}$, donde $M \in IR$, pues:

Si $M = 0$ la solución es $z(\mathrm{t}) = 2$,

Si $z(t) > 2$ entonces $M = e^C > 0$ y

Si $z(t) < 2$ entonces $M = -e^C < 0$

Se llama **Problema de Valor Inicial** (P.V.I) al problema que consiste en determinar la función que satisface una ecuación diferencial y que su gráfico pasa por un punto dado.

Ejemplo: Resolver el problema de valor inicial: $z'(t) = (z-2)(1+t^2), \quad z(1) = 3$

Para resolverlo, primero debemos encontrar el conjunto solución de la ecuación diferencial y luego determinar el valor de la constante M para la cual $z(1) = 3$.

Como el conjunto solución es $z(t) = 2 + Me^{\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)}$ y $z(1) = 3$, entonces $z(t) > 2$ y por lo tanto $M > 0$ y $2 + Me^{\frac{4}{3}} = 3 \Leftrightarrow Me^{\frac{4}{3}} = 1 \Leftrightarrow M = e^{\frac{-4}{3}}$.

Por lo tanto la solución del P.V.I es: $z(t) = 2 + e^{(t+\frac{1}{3}t^3-\frac{4}{3})}$.

Objetivos de aprendizaje:

- Aplicar un método específico para determinar el conjunto solución de una ecuación de variables separables.
- Modelar ecuaciones diferenciales de variables separables traduciendo al lenguaje matemático un enunciado verbal, en situaciones contextualizadas.

Problema 1: Determine el conjunto de todas las funciones que son solución de la siguiente ecuación diferencial: $xy\, y'(x) - \ln(x) = 0$

Problema 2: Resuelva los siguientes Problemas de Valor Inicial:

a) $\sqrt{1-x^2}\; y'(x) - \sqrt{1-y^2} = 0, \quad y(0) = 1$

b) $xe^{-y}\, sen(x)dx - 2dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Problema 3: Una represa contiene actualmente 200 millones de galones de agua fluorada, que contiene 1600 libras de flúor. La solución fluye de la represa a una razón de 4 millones de galones por día y se reemplaza a la misma razón por agua pura. ¿Cuál es la cantidad de flúor existente en la represa en cada instante? ¿Existe un momento donde la cantidad de flúor en la represa es cero?

Problema 4: Suponga que una persona resfriada ingresa a una comunidad aislada compuesta por 1000 personas. Si asumimos que el virus se propaga a una razón proporcional al producto entre la cantidad de personas infectadas y la cantidad de personas no infectadas, ¿cuál es la cantidad de personas infectadas al séptimo día si al tercer día ya había 40 personas infectadas?