TALLER 12 de MATEMATICAS 2
Programa de Bachillerato. Universidad de Chile

Aplicaciones Geométricas de la Integral Definida

Una de las aplicaciones geométricas más relevantes de la integral definida es el cálculo del área de una región R comprendida entre curvas. Si la región R es el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $a \le x \le b$ y $g(x) \le y \le f(x)$ entonces su área (ver Figura 1) se calcula mediante la integral definida $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$

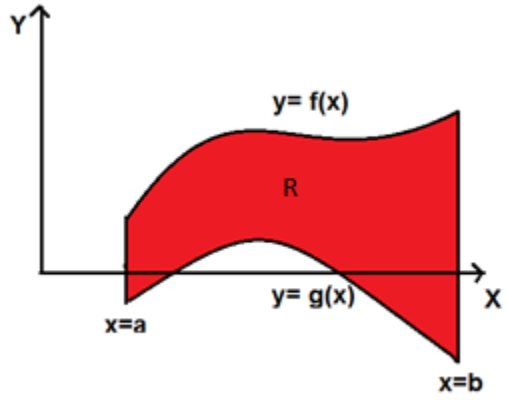

Figura 1.

Por otro lado si la Región R es el conjunto de puntos (x, y) tales que $a \le y \le b$ y $g(y) \le x \le f(y)$ entonces el área de la región R se calcula mediante la integral definida: $\int_a^b (f(y) - g(y))dy$.

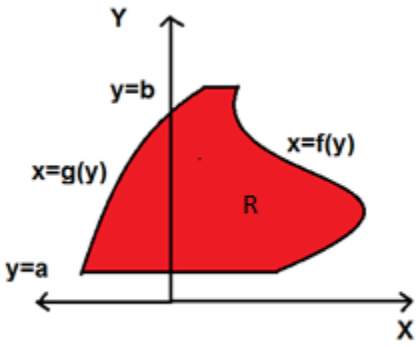

Figura 2.

También mediante una integral definida podemos calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X la región R, definida por los puntos (x, y) tales que $0 \le a \le x \le b$ y $0 \le y \le f(x)$.

Si hacemos girar R alrededor del eje X entonces su volumen se obtiene mediante la integral definida. $\int_a^b \pi\ f(x)^2 dx$.

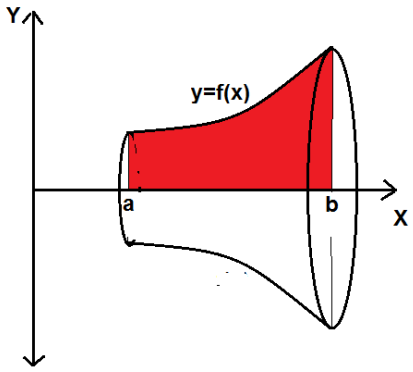

Figura 3.

Objetivos

- Determina área de regiones del plano acotadas por ciertas curvas.
- Determina el volumen de un sólido de revolución que se forma al girar regiones acotadas entorno al eje X o eje Y.

Problemas

1) Determina el área de las siguientes regiones R del plano, las cuales se hallan limitadas por las siguientes curvas:

a) $y = \frac{1}{2}e^x \quad y = e^{-x}, \quad x = 0, \quad x = 2$.

b) $y = 1 + \sqrt{x}, \quad y = \frac{(3+x)}{3}$.

c) $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$.

d) $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$.

e) $y = \cos(x), \quad y = sen(2x), \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

f) $y = x^2$ e $y = 2x$.

2) Halle el volumen del sólido de revolución que se forma al girar alrededor del eje que se indica, la región R acotada por las curvas dadas.

a) $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 1$ y $x = 2$, girar alrededor del eje X.

b) $y = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = \sqrt{8}$, girar alrededor del eje X.

c) c) $y = \frac{1}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}, \quad x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$, girar alrededor del eje X.

d) d) $y = \ln(x+1), \quad x = 0, \quad , \quad x = 1$, girar alrededor del eje Y.

e) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 0$ e $y = 0$, girar alrededor del eje Y.

3) Calcule el volumen de un cono circular recto truncado con altura h y bases de radios r_1 y r_2.