

Taller 8

Adolfo Henríquez Llanos

1, Como e^x y $\ln x$ son derivables en todo su dominio; calculamos el dominio y luego derivamos.

a) $f(x) = e^x \cdot \ln(3x)$

Para encontrar el Dominio, nos fijamos en las restricciones, cada vez que tengamos $\ln(\star)$, $\star > 0$.

Luego,

• $\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (e^x \ln(3x))' &= (e^x)' \cdot \ln(3x) + e^x (\ln 3x)' \\ &= e^x \ln(3x) + e^x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 \end{aligned}$$

b) $\ln(2x - xe^{3x})$

$$2x - xe^{3x} > 0$$

$$x(2 - e^{3x}) > 0$$

Pts críticas

$$\begin{aligned} \boxed{x=0} & \quad \begin{cases} 2 - e^{3x} = 0 \\ 2 = e^{3x} / \ln e \\ \ln 2 = 3x \\ \boxed{\frac{\ln 2}{3} = x} \end{cases} \end{aligned}$$

	$-\infty$	0	$\frac{\ln 2}{3}$	$+\infty$
x	-	•	+	+
$2e^{3x}$	+	+	•	-
	-	+	+	+

Dom $f = (0, \frac{\ln 2}{3})$

$$(\ln(2x - xe^{3x}))' = \frac{1}{2x - xe^{3x}} \cdot (2x - xe^{3x})' = \frac{1}{2x - xe^{3x}} (2 - (e^{3x} + xe^{3x} \cdot 3))$$

c) Antes de continuar, en ayudantía demostramos que

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a} \quad \text{y} \quad \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

• $f(x) = 2^x \log_3 x$

$\rightarrow \text{Dom } f = (0, \infty^+)$ $\leftarrow$ (solo nos importa que el argumento del logaritmo sea mayor a cero)

$$\rightarrow (2^x \cdot \log_3 x)' = \underbrace{(2^x \ln 2)}_{(2^x)'} \cdot \log_3 x + 2^x \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x \ln 3}\right)}_{(\log_3 x)'}$$

d) $f(x) = \frac{e^{-2x} + e^x}{2 + e^{-x}}$

Como $e^{\star} > 0$ sin importar que sea $\star \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ y $2 + e^{-x} \neq 0$, así que no se divide por cero nunca. Así

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{-2x} + e^x)'(2 + e^{-x}) - (e^{-2x} + e^x)(2 + e^{-x})'}{(2 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^{-2x} \cdot -2 + e^x)(2 + e^{-x}) - (e^{-2x} + e^x)(e^{-x} \cdot -1)}{(2 + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

2.]

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \ln(1) = 0$ • $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ • $(x)' = 1$

Por L'hôpital

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1+0} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} a^x - b^x = a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0$ • $(a^x - b^x)' = a^x \ln a - b^x \ln b$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ • $(x)' = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \stackrel{\text{L'hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1}$

$= a^0 \ln a - b^0 \ln b = \ln a - \ln b$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x) = 0$ ★ $(\log_a(1+x))' = \frac{1}{(1+x) \ln a}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x) \ln a}$

★ $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ★ $(x)' = 1$ $= \frac{1}{(1+0) \ln a} = \frac{1}{\ln a}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^2}{e^x}$

Es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, por L'hôpital $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x}{e^x}$, que

también es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, Volvemos a aplicar L'hôpital:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

$$3) h(t) = \frac{120}{1 + 200 e^{-0,2t}}$$

$$2) h(10) = ?$$

$$h(10) = \frac{120}{1 + 200 \cdot e^{-0,2 \cdot 10}} = \frac{120}{1 + 200 \cdot e^{-6}} = \frac{120}{1 + \frac{200}{e^6}}$$

$$b) \text{ Si } h(t) = 50, t = ?$$

$$h(t) = 50$$

$$\frac{120}{1 + 200 e^{-0,2t}} = 50 \Rightarrow 120 = 50 + 1000 e^{-0,2t}$$

$$\Rightarrow \frac{70}{1000} = e^{-0,2t} \quad / \ln()$$

Cada vez que tengas la incógnita en el exponente, aplica $\ln(x)$.

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{70}{1000}\right) = -0,2t = -\frac{t}{5}$$

$$\Rightarrow t = -5 \ln\left(\frac{70}{1000}\right)$$

c) Primero vemos asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 120$$

Luego derivamos

$$\frac{d(h(t))}{dt} = 120 \left(\frac{-1}{(1 + 200 e^{-0,2t})^2} \right) \cdot (1 + 200 e^{-0,2t})'$$

$$= -\frac{120}{(1 + 200 e^{-0,2t})^2} \cdot (200 \cdot -0,2 \cdot e^{-0,2t}) > 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

b) • Veamos asíntotas horizontales.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ no lo podemos tomar, pues $\text{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} = \infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales

• Recordemos que los candidatos a asíntota vertical son las indeterminaciones.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}$
↓
pues e^x es continuo

$$\begin{aligned} & \text{y } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{de la forma } \frac{0}{\infty} \end{array} \right\} \\ & \text{Aplicamos L'Hôpital} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Calculemos } (e^{x \ln x})' &= e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \\ &= e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= e^{x \ln x} (\ln x + 1) \end{aligned}$$

Ahora veamos cuando $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} e^{x \ln x} (\ln x + 1) &= 0 \\ \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 / e^1 \\ x &= e^{-1} = 1/e \end{aligned}$$

~~hacemos tres pasos~~ ~~L'Hôpital~~ ~~USA~~ ~~para~~ ~~optimizar~~

Fun Fact: Toda Función puede descomponerse en la suma de una función par y una función impar, definiendo $\text{par}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ &

$$\text{impar}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Así $f(x) = \text{par}(x) + \text{impar}(x)$

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

En el caso de $f(x) = e^x$, se tiene que su parte par es $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$ y que su parte impar es $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$. Así que

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x).$$

0

Ahora sigamos con $4+1=5$ (vps!).

3 $f(x) = x^x := e^{x \ln(x)}$

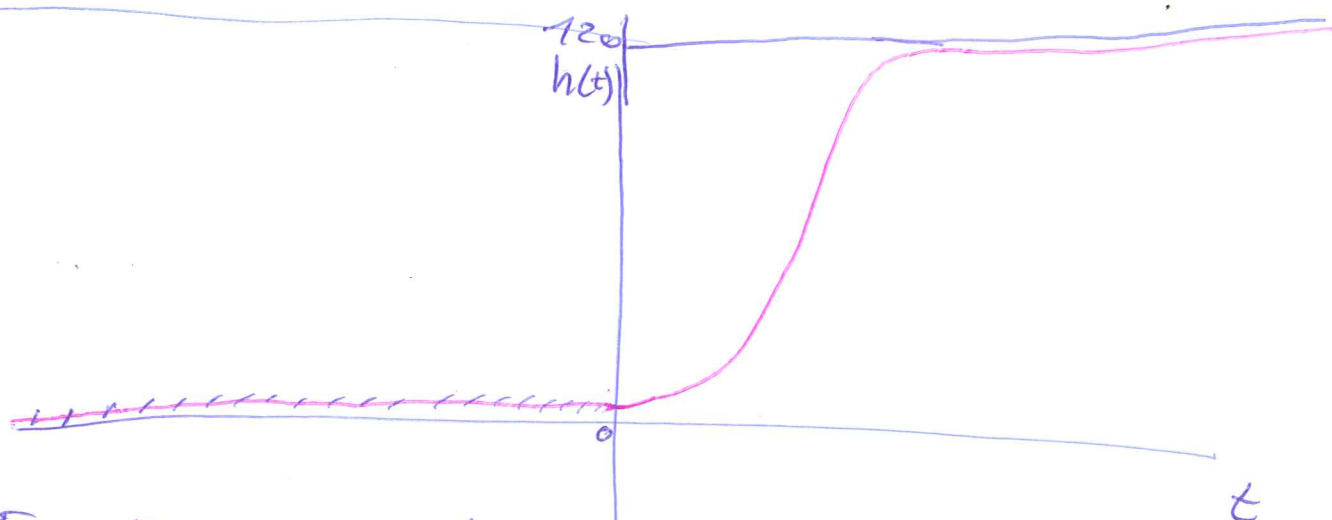
2) Notemos que $f(x)$ es la composición de las funciones e^x y $x \ln x$. $\text{Dom}(e^x) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(x \ln x) = (0, +\infty)$

Y además $\text{Rec}(x \ln x) \subseteq \mathbb{R}$, luego

$$\text{Dom}(x^x) = \left\{ \underbrace{x \in (0, +\infty)}_{x \in \text{Dom}(x \ln x)} / x \ln x \in \mathbb{R} \right\} = (0, +\infty)$$

$x \ln x \in \text{Dom}(e^x)$

Entonces $h(t)$ es siempre creciente. Así



En ~~esta~~ esta gráfica
 $h(t)$ en todo $\mathbb{R}$,
pero como t representa
tiempo, solo debemos
considerar el primer cuadrante.

4)

$$a) \sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x} \cdot -1}{2} \right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x} \cdot -1}{2} \right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \sinh(x)$$

b) $\cosh$ es par, i.e. $\cosh(-x) = \cosh(x)$. Veámoslo

$$\rightarrow \cosh(-x) = \left(\frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \right) = \left(\frac{e^{-x} + e^x}{2} \right) = \cosh(x)$$

$\sinh(x)$ es una función impar, i.e. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

$$\rightarrow \sinh(-x) = \left(\frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \right) = \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2} \right) = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = -\sinh(x)$$

c) PD $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

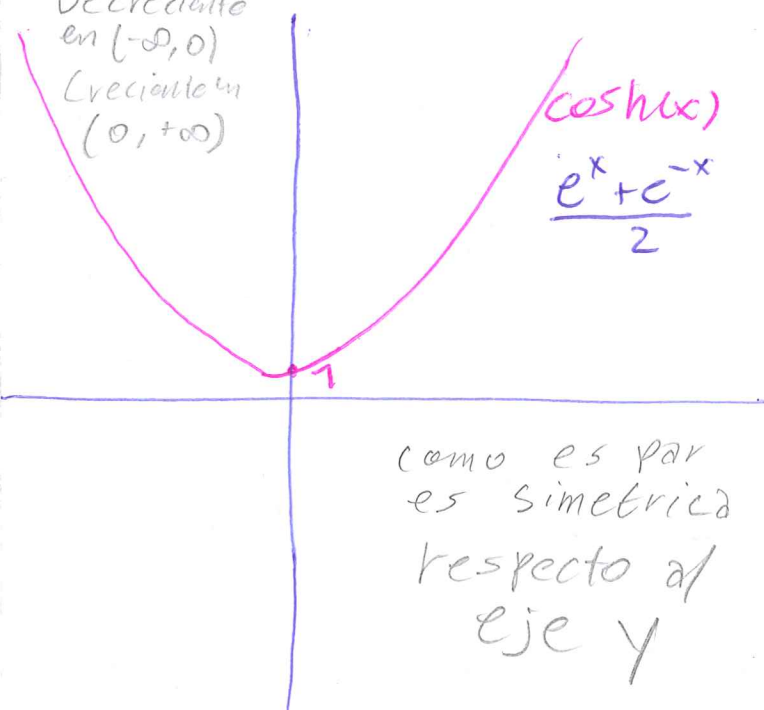
$$= \left(\frac{e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4} \right)$$

$$= \frac{e^{+2x} + 2 + e^{-2x} - e^{+2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{2+2}{4} = 1$$

d) $\cosh(x)$, ~~$\sinh(x)$~~

↓
Decreciente
en $(-\infty, 0)$
Creciente en
 $(0, +\infty)$



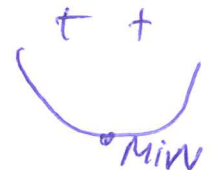
$\sinh(x)$



Para ver si es mínimo, máximo o punto de inflexión usamos criterio de la segunda derivada.

$$f''(x) = (e^{x \ln x} (\ln x + 1))' = (e^{x \ln x})' (\ln x + 1) + e^{x \ln x} (\ln x + 1)' \\ = e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + e^{x \ln x} \left(\frac{1}{x} \right),$$

$$f''(1/e) = \underbrace{e^{1/e \cdot \ln e}}_{>0} \underbrace{(\ln(1/e) + 1)^2}_{>0} + \underbrace{e^{(1/e \ln 1/e)}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{1}{1/e} \right)}_{>0} > 0$$

Luego  $x = 1/e$ es un mínimo (global, porque es el único mínimo)

Por lo tanto, como su dominio es $(0, +\infty)$, concluimos que en $(1/e, +\infty)$ la función es creciente,

$$\text{Luego } \text{Rec}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} / y \geq f(1/e) = e^{1/e \ln(1/e)} = e^{-1/e} \right\} \\ y \geq \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$$

$$\text{Rec}(f) = \left[\frac{1}{\sqrt[e]{e}}, +\infty \right)$$

d) Ya calculamos $f''(x)$ en c), factorizando por $e^{x \ln x}$:

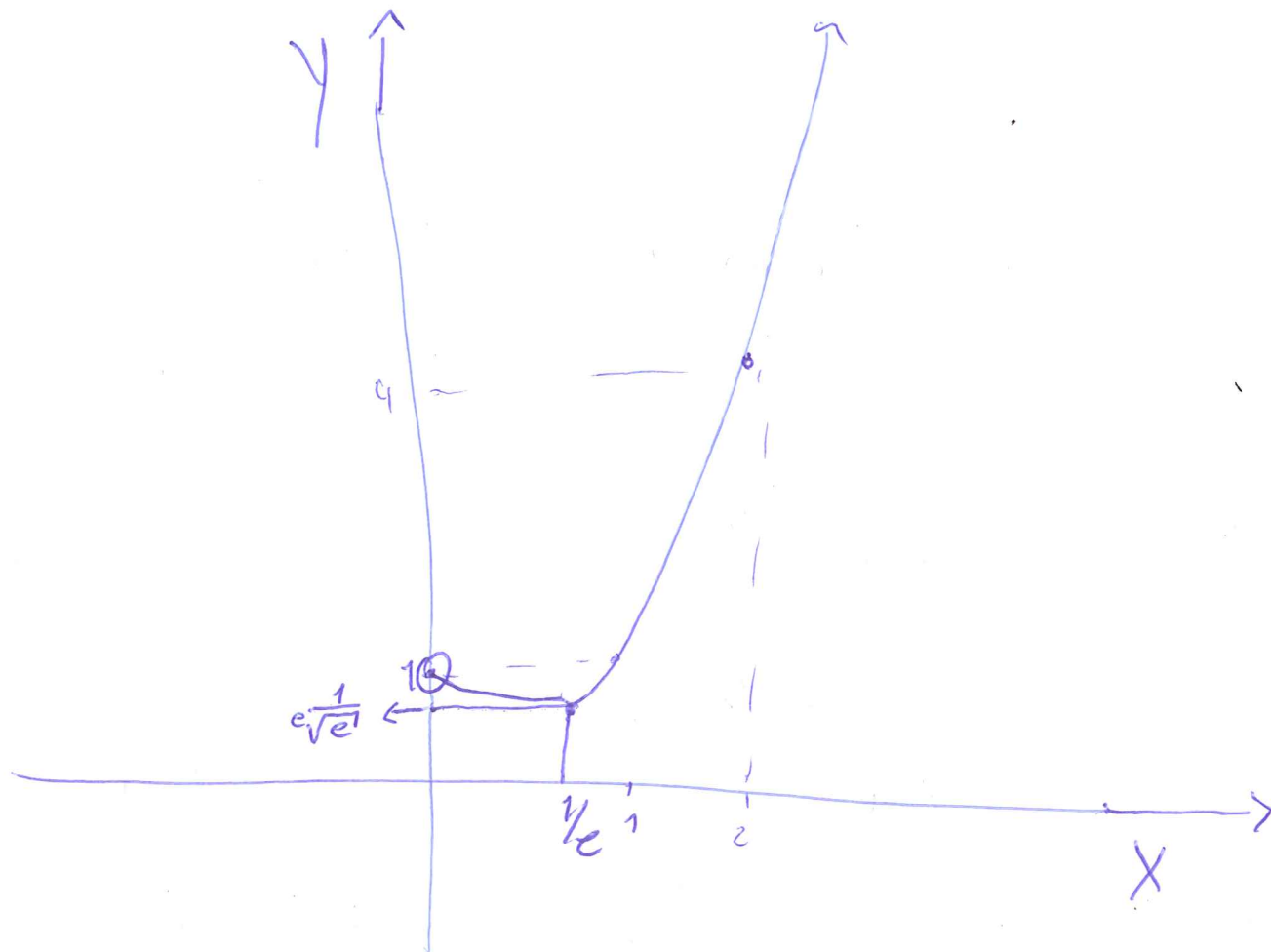
$$f''(x) = e^{x \ln x} \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right) = x^x \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right)$$

Como $e^{x \ln x} > 0$, $(\ln x + 1)^2 > 0$ y $\frac{1}{x} > 0$ (en $(0, +\infty)$), nunca pasa que $f''(x) = 0$, por lo tanto no tiene puntos de inflexión, luego nunca cambia de concavidad;

Evaluamos en un punto para ver si $f''(x) > 0$ o $f''(x) < 0$.

Ya evaluamos antes en $f''(1/e) > 0$, luego f es **CONCAVA**.

e)



Ánimo!
Éxito en todo

[Signature]

~~$$2 = \frac{1}{x} \cdot x = 1 \quad | \cdot x$$~~