

Taller 7

1. i) $g(x) = \int_0^x \sqrt{2t} dt, x > 0.$

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{2t} dt &= \int_0^x \sqrt{2} t^{1/2} dt = \sqrt{2} \int_0^x t^{1/2} dt = \sqrt{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_0^x \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt[3]{x^2} // \end{aligned}$$

ii) $\int_{-\pi}^0 \sin(x) + (x+3)^2 dx = \int_{-\pi}^0 \sin(x) dx + \int_{-\pi}^0 (x+3)^2 dx$

$$= \left[-\cos(x) \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{(x+3)^3}{3} \right]_{-\pi}^0$$

$$= -\cos(0) + \cos(-\pi) + \frac{(0+3)^3}{3} - \frac{(3-\pi)^3}{3}$$

$$= -1 + 1 + 9 - \frac{(3-\pi)^3}{3} = 9 - \frac{(3-\pi)^3}{3} //$$

iii) $\int_{-1}^2 [(x+1) - (x^2-1)] dx = \int_{-1}^2 x dx - \int_{-1}^2 x^2 dx + \int_{-1}^2 2 dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 + \left[2x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 4 - 2 = 4 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3} = \frac{24-3-14}{6}$$

$$= \frac{7}{6} //$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \int_0^3 |3x-5| dx &= \int_0^{5/3} 5-3x dx + \int_{5/3}^3 3x-5 dx \\
 &= \int_0^{5/3} 5 dx - \int_0^{5/3} 3x dx + \int_{5/3}^3 3x dx - \int_{5/3}^3 5 dx \\
 &= 5x \Big|_0^{5/3} - \frac{3x^2}{2} \Big|_0^{5/3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_{5/3}^3 - 5x \Big|_{5/3}^3 \\
 &= 5 \cdot \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{3 \cdot 5^2}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 5 \cdot 5 + 5 \cdot \frac{5}{3} \\
 &= \frac{50}{3} - \frac{25}{3} + \frac{75}{2} - 25 \\
 &= \frac{25}{3} + \frac{75}{2} - 25 //
 \end{aligned}$$

2. a) $f(x) = 3e^{2x}$ tiene que son todos los reales.

b) $f(x) = 2e^{-3x} + 4$, son todos los reales

c) $f(x) = xe^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

d) $g(x) = \ln \left| \frac{x+3}{2-x} \right|$. Es necesario, solo determinar para que valores

$$\frac{x+3}{2-x} \neq 0.$$

Claramente $x \neq 2$. Ahora $\frac{x+3}{2-x} = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Luego $\text{Dom } g = \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$ //

e) $f(x) = e^{-x^2}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

f) $f(x) = \log_{1/3}(x)$

$\log_{1/3}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1/3)}$, luego $\text{Dom } f = \text{Dom } \ln =]0, \infty[//$

3.a) $f(x) = x e^{-3x}$. Primero, derivamos.

$$f'(x) = e^{-3x} + x e^{-3x}(-3) = e^{-3x}(1-3x)$$

$$|f'(x) = 0| \Leftrightarrow e^{-3x} + x e^{-3x}(-3) = 0$$

$$e^{-3x}(1-3x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -3e^{-3x} - 3(e^{-3x} - 3x e^{-3x})$$

$$= -3e^{-3x} - 3e^{-3x} + 9x e^{-3x} = 9x e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}(3x-2)$$

$$|f''(x) = 0| \Leftrightarrow 3e^{-3x}(3x-2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Luego, como dominio de f son todos los reales, presentamos la siguiente tabla.

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	∞
$f'(x) = e^{-3x}(1-3x)$		+	-	-
$f''(x) = 3e^{-3x}(3x-2)$		-	-	+
f		$\nearrow \cup$	$\searrow \cap$	$\nearrow \cup$

Máximo Local
Punto de Inflexión

Como en $x = \frac{1}{3}$ la función pasa de creciente a decreciente, entonces presenta un máximo local. Además, no tenemos que es el único máximo que hay y por lo tanto sería global.

Asintotas:

Verticales, no presenta, pues es una función continua y su dominio son todos los reales

Horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{3x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3e^{3x}} = 0.$$

Por lo tanto, tiene asíntota horizontal en $y=0$.

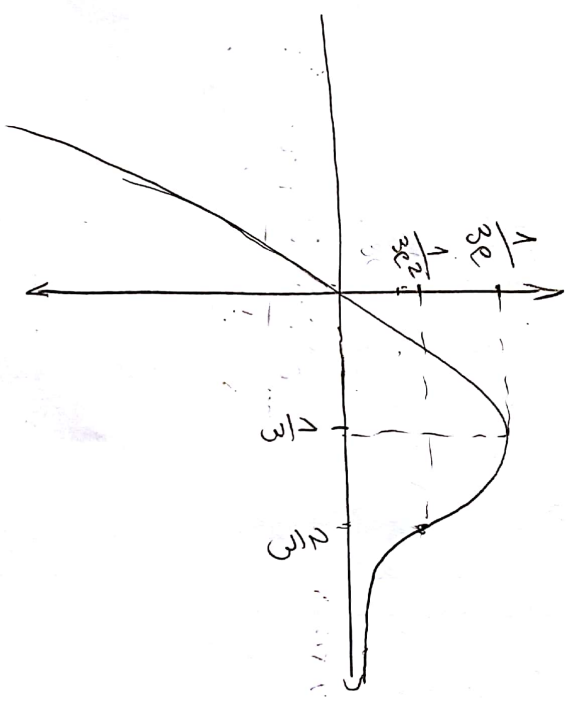
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{3x}} = -\infty \quad \text{pues } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0.$$

Por último, evaluamos puntos interesantes de la gráfica.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} e^{-3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} e^{-1} = \frac{1}{3e} \quad // \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} e^{-3 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{3e^2}$$

$$f(0) = 0$$

Luego, la gráfica es algo como



b) $f(x) = x \ln(x)$. Notamos que $\text{Dom } f =]0, \infty[$.

Ahora, derivamos y evaluamos a cero

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

$$|f'(x) = 0| \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} //$$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, $\forall x \in]0, \infty[$. Por lo tanto, no tiene punto de inflexión.

Luego, realizando una tabla

	0	$\frac{1}{e}$	∞
f'	-		+
f''	+		+
f	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$

$\uparrow$
 Punto
mínimo

Notamos que en $x = \frac{1}{e}$, la función tiene un mínimo local. Sin embargo, al ser el único punto que es mínimo local, agregando que, para $x < \frac{1}{e}$, $f(x) < f(\frac{1}{e})$ y $x > \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) > f(\frac{1}{e})$, entonces es mínimo global.

Asíntotas

Verticales, hay que en si tiene asíntota en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

Luego, no posee asíntotas verticales.

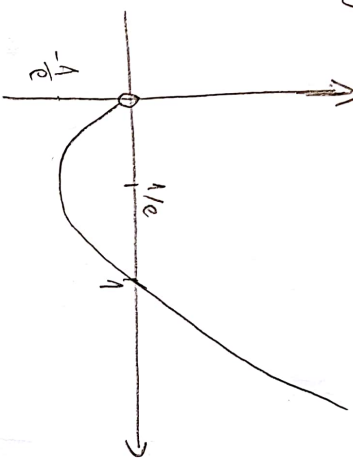
Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(x) = \infty, \text{ no hay duda en esto.}$$

Luego, no posee asíntotas. Por último, evaluamos en puntos importantes.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}, \quad f(1) = 1 \cdot \ln(1) = 0 //$$

Luego, la gráfica sería como



— 0 —

$$5. a) \ln(x) = \ln(8-x) \Leftrightarrow x = 8-x$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$b) 7e^x - e^{2x} = 12, \quad y = e^x$$

$$7y - y^2 = 12$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2}$$

$$y_1 = \frac{7+1}{2}$$

$$y_2 = \frac{7-1}{2}$$

$$y_1 = 4$$

$$y_2 = 3$$

Luego, $e^x = 4 \vee e^x = 3$
 $x = \ln(4) \vee x = \ln(3) //$

$$c) 3(3^x) + 9(3^{-x}) = 28, \quad y = 3^x$$

$$3y + \frac{9}{y} = 28$$

$$3y^2 + 9 = 28y$$

$$3y^2 - 28y + 9 = 0$$

$$y = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{28 \pm 2\sqrt{4 \cdot 7^2 - 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{14 \pm 13}{3}$$

$$y_1 = \frac{14+13}{3} = \frac{17}{3} \quad \vee \quad y_2 = \frac{14-13}{3} = \frac{1}{3}$$

$$3^x = \frac{17}{3} \quad \vee \quad 3^x = \frac{1}{3}$$

$$3^{x+1} = 17 \quad \vee \quad x = -1$$

$$x = \ln(17) - 1$$

$$d) \ln(x+6) + \ln(x-3) = \ln(5) + \ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{x+6}{x-3}\right) = \ln(10)$$

$$\frac{x+6}{x-3} = 10 \Leftrightarrow$$

$$x+6 = 10(x-3)$$

$$x+6 = 10x-30$$

$$36 = 9x$$

$$x = 4$$

$$e) (\ln(x))^2 = 2 - \ln(x).$$

$$\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$$

$$(\ln(x) + 2)(\ln(x) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e //$$