Taller 5 de Matemáticas 2
Programa de Bachillerato Universidad de Chile
Semana del 23 octubre al 27 octubre

En este taller aplicaremos las propiedades del símbolo sumatoria y sumas conocidas para deducir el valor de otras sumatorias notables y obtener valores exactos y/o aproximados de la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado, a partir del cálculo de sumas de Riemann para una partición dada del intervalo. Además, a través de las sumas de Riemann superior e inferior determinaremos el error máximo cometido en el valor estimado. Veremos que el cálculo de una integral definida nos permite determinar el área de la región limitada bajo el gráfico de la función y sobre el intervalo cerrado.

Objetivos

- Calcula sumatorias aplicando las propiedades y sumas notables.
- Determina los puntos y longitud de los intervalos de una partición dada.
- Calcula la suma superior e inferior de Riemann de una función para una partición.
- Calcula una integral definida mediante sumas de Riemann.
- Aproxima una integral definida mediante sumas de Riemann y determina el máximo error cometido.

Problema 1

a) Calcule $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2$

b) Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} i\, r^{i-1}$, donde $r \neq 1, -1$.

i) Muestre que $r\,S_n - S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(ir^i - (i-1)r^{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} r^{i-1}$.

ii) A partir de i) calcule el valor de S_n.

Problema 2

En este problema, deberá calcular el área de la región indicada mediante la aplicación de fórmulas geométricas y mediante una integral definida.

Sea $f(x) = 2 + 3x, \quad 2 \leq x \leq 4.$

a) Grafique f y determine el área del trapecio determinado por la región limitada bajo el gráfico de f y sobre el intervalo [2,4].

b) Vamos a calcular $\int_2^4 f(x)dx$. Para ello subdividiremos el intervalo $[2,4]$ en n −subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i\ ]$, de igual longitud, l_n, y para esta partición P_n, calcularemos el límite de la suma superior de Riemann $S(f,P_n)$, y también el límite de la suma inferior de Riemann $s(f,P_n)$ cuando l_n tiende a cero.

Recuerde que: $\lim\limits_{l_n \to 0} s(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{l_n \to 0} S(f,P_n)$ y que si $[a,b]$ se subdivide en n partes iguales entonces cada trozo tiene longitud: $l_n = \frac{b-a}{n}$ y los puntos de la partición son: $x_0 = a$; $x_1 = a + l_n; \cdots; x_i = a + l_n\, i\, ; \cdots; x_n = b$ y $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$.

i) Para el intervalo $[2,4]$ determine: l_n ; $x_i = a + l_n\, i$; el valor máximo de f en cada intervalo I_i denotado por $M_i(f)$ y el valor mínimo de f en cada intervalo I_i denotado por $m_i(f)$.

ii) Calcule $S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ y $s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$.

iii) Verifique que: $s(f,P_n) < S(f,P_n)$, para todo n y que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(S(f,P_n) - s(f,P_n)\right) = 0.$

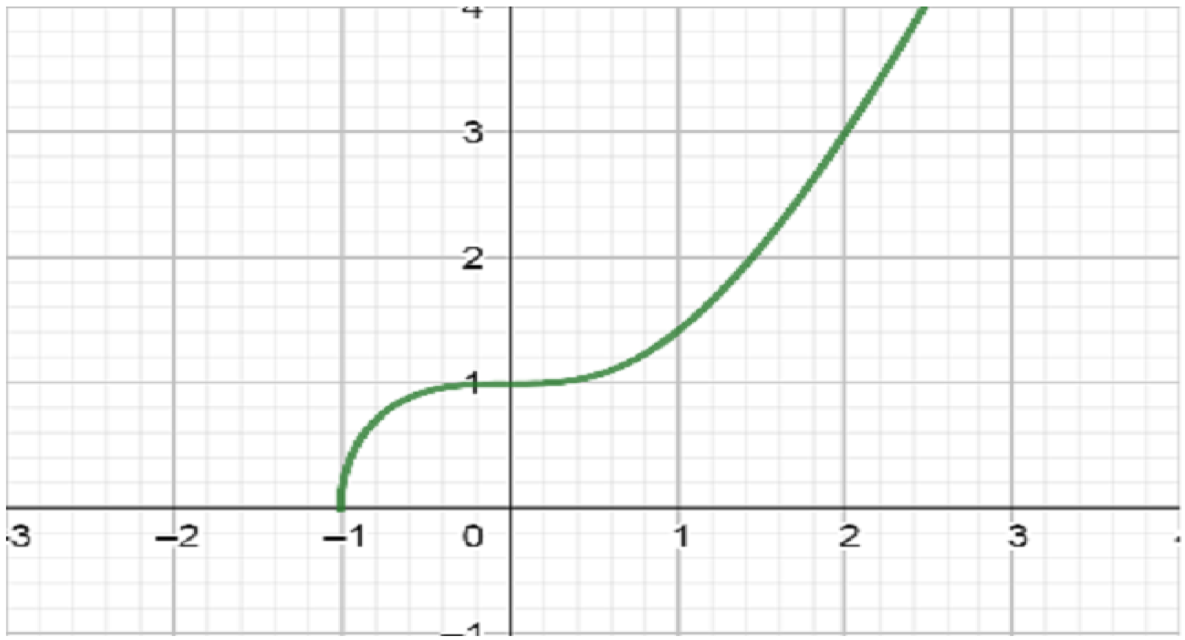
iv) Calcule $\lim\limits_{l_n \to 0} S(f,P_n) = \int_2^4 f(x)dx.$

v) ¿Es $\int_2^4 f(x)dx$ igual al área del trapezoide?

Problema 3

Estime la integral definida $\int_{-1}^{2} \sqrt{1+x^3}\, dx$, subdividiendo el intervalo en 6 sub-intervalos de igual longitud y mediante la suma de Riemann del punto medio. La figura muestra el gráfico de $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Marque en el eje X los puntos de la partición y los puntos medios de cada intervalo. Dibuje los rectángulos correspondientes a cada sub-intervalo y achure el área calculada mediante la suma de Riemann pedida.

Determine el máximo error cometido en la estimación.



4
3
2
1
-3
−2
−1
0
1
2
3
−1