

## Control 8 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Viernes 23 de Noviembre, 2018

**Tiempo : 15 minutos .**

**Nombre:**

**Elija sólo un problema.**

1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(e + \operatorname{sen}(\pi e^{2x}))}{e^{\cos(x)}}.$$

Determine  $f'(0)$ .

Solución:

Por simplicidad la función  $f$  la expresaremos como:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ donde } g(x) = \ln(e + \operatorname{sen}(\pi e^{2x})) \text{ y } h(x) = e^{\cos(x)}.$$

$$\text{Así, } f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}.$$

Calculando las derivadas de la funciones  $g'(x)$  y  $h'(x)$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{e + \operatorname{sen}(\pi e^{2x})} \cdot \cos(\pi e^{2x}) \cdot \pi e^{2x} \cdot 2.$$

$$h'(x) = e^{\cos(x)} \cdot -\operatorname{sen}(x).$$

Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{\frac{2\pi e^{2x} \cos(\pi e^{2x})}{e + \operatorname{sen}(\pi e^{2x})} \cdot e^{\cos(x)} + \ln(e + \operatorname{sen}(\pi e^{2x})) \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)}}{e^{2\cos(x)}}.$$

4 puntos.

Además,

$$f'(0) = \frac{g'(0)h(0) - g(0)h'(0)}{h^2(0)}.$$

$$g(0) = \ln(e + \operatorname{sen}(\pi)) = \ln(e) = 1, \quad h(0) = e.$$

$$g'(0) = \frac{2\pi \cos(\pi)}{e + \operatorname{sen}(\pi)} = -\frac{2\pi}{e}.$$

$$h'(0) = 0.$$

1.6 puntos.

Finalmente,

$$f'(0) = \frac{-\frac{2\pi}{e} \cdot e - 1 \cdot 0}{e^2} = -\frac{2\pi}{e^2}.$$

0.4 punto.

2. Un tanque de almacenamiento de aceite se rompe en el tiempo  $t = 0$  y se fuga aceite a razón de  $r(t) = 100 e^{-0.01 t}$  litros por minuto. ¿Cuánto aceite se fuga durante la primera hora?

Solución:

Sea  $v(t)$  la cantidad de aceite en litros que sale del tanque a los  $t$  minutos, tal que  $v'(t) = r(t)$ .

La primera hora, equivale a los primeros 60 minutos, por lo que debemos calcular:

$$v(60) - v(0) = \int_0^{60} r(t) dt.$$

1.5 puntos.

$$\int_0^{60} 100 e^{-0.01 t} dt = 100 \cdot \frac{e^{-0.01 t}}{-0.01} \Big|_0^{60}.$$

3 puntos.

Por lo tanto,

$$v(60) - v(0) = \int_0^{60} r(t) dt = 10^4(1 - e^{-0.6}).$$

1 punto.

Por lo que, durante la primera hora se ha fugado del tanque  $10^4(1 - e^{-0.6})$  litros de aceite.

0.5 punto.