Taller 8 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile

Semana del 12 de Noviembre al 16 de Noviembre, 2018

En este taller estudiaremos las funciones exponenciales y logaritmos, aplicando sus propiedades y conceptos de Cálculo Diferencial. Resolveremos problemas de contexto y análisis de curva que se relacionan con estas funciones.

Objetivos

- Cálcular de límites de funciones que se relacionan con las funciones logaritmo y exponencial.
- Determinar cuando una función de estos tipos es diferenciable.
- Resolver problemas contextualizados utilizando estas funciones.
- Realizar análisis de curva con este tipo de funciones.

Ejercicios

1. Indique el conjunto para el cual las siguientes funciones son diferenciables y halle la función derivada.

   a) $f(x) = e^x \cdot \ln(3x)$

   b) $f(x) = \ln(2x - xe^{3x})$

   c) $f(x) = 2^x \log_3(x)$

   d) $f(x) = \dfrac{e^{-2x} + e^x}{2 + e^{-x}}$

2. Use **Regla de L'hôpital** para determinar si los siguientes límites existen.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x + x^2}{e^x}$

3. El crecimiento en altura de árboles se describe con frecuencia con una ecuación logística. Suponga que la altura h (en pies) de un árbol a los t años de edad viene modelada por:

$$h(t) = \frac{120}{1 + 200\, e^{-0.2t}},$$

a) ¿Cuál es la altura del árbol a los 10 años de edad?

b) ¿Qué edad tendrá el árbol, cuando este alcance una altura de 50 pies?

c) Esbozar la gráfica de h.

4. Las funciones $\cosh, \operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, se llaman el *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* respectivamente.

   a) Muestre que $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$ y que $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$.

   b) Muestre que $\cosh(x)$ es par y $\operatorname{senh}(x)$ impar.

   c) Muestre que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

   d) Grafique $\cosh(x)$ y $\operatorname{senh}(x)$.

5. Se define la función $f(x) = x^x := e^{x\ln(x)}$. Se requiere determinar:

   a) Dominio de la función.

   b) Asíntotas verticales y/o horizontales (si es que existen).

   c) Muestre que f posee un mínimo global en $x = \dfrac{1}{e}$ y concluya el recorrido de f.

   d) Muestre que $f''(x) = x^x \left[(\ln(x) + 1)^2 + \dfrac{1}{x}\right]$ y concluya que f no tiene puntos de inflexión (considerando el dominio encontrado en a)) y determine su concavidad.

   e) Esboce el gráfico de la función.