

Taller 2 de Matemáticas 2
Programa de Bachillerato Universidad de Chile
Semana del 1 octubre al 5 octubre

En este taller utilizaremos la primera y segunda derivada de una función para determinar su razón de cambio en un punto determinado, aproximar su valor en un punto, determinar sus intervalos de monotonía, de concavidad, sus extremos locales y absolutos y sus puntos de inflexión. Además aplicaremos el teorema del valor medio para demostrar propiedades de las funciones diferenciables.

Objetivos

1. Aplica las reglas de derivación: (suma, producto, cociente, regla de la cadena para calcular:
 - (i) La derivada (razón de cambio) de una función en un punto.
 - (ii) Su aproximación afín, y la utiliza para estimar.
 - (iii) La ecuación de la recta tangente al gráfico de la función en un punto.
2. En situaciones contextualizadas, utiliza la aproximación afín para aproximar el valor de una función en un punto determinado.
3. Justifica matemáticamente (utilizando los criterios de la 1ra. y 2da. derivada) el comportamiento cualitativo y cuantitativo de una función, para estudiar aspectos relevantes tales como:
 - (i) La monotonía (creciente o decreciente),
 - (ii) Los extremos locales de una función (máximos y/o mínimos),
 - (iii) La existencia de puntos de inflexión,
 - (iv) La concavidad de una función (cóncava y/o convexa),
 - (v) trazado manual del gráfico de la función.
4. Modela e interpreta en un contexto, la razón de cambio de una función: indicando sus unidades, su valor y su significado en el contexto.
5. Aplica el teorema del valor medio para demostrar propiedades.

Ejercicios

Problema 1

Encontrar los valores de k y los puntos $(a, f(a))$ tales que la recta dada sea tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$.

$$f(x) = x^2 - kx, \text{ recta } y = 5x - 4.$$

Problema 2

a) Se sabe que la altura del nivel de agua en un recipiente al cabo de 1 hora es 15 cm y que su razón de cambio en este mismo instante es $-0.5 \left[\frac{cm}{h} \right]$.

Estime la altura del nivel del agua en el recipiente 2 minutos antes de las 3 horas y 1 minuto después de las tres horas.

b) Aplique el cálculo diferencial para estimar el valor de la diferencia:

$$\sin(0.26\pi) - \cos(0.21\pi).$$

Problema 3

Sea $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

Esbozar el gráfico de f realizando análisis de curva, es decir, determine: interceptos, asíntotas, monotonía, extremos locales y absolutos, concavidad y puntos de inflexión.

Problema 4

Se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba a una velocidad constante de 600 m/h. A 50 metros del punto de lanzamiento se encuentra un observador que sigue la trayectoria del proyectil.

a) Modele el ángulo de elevación del observador en función del tiempo transcurrido desde su lanzamiento

b) Determine la razón de cambio instantánea del ángulo de elevación del observador, cuando el proyectil ha recorrido 100 metros.

Problema 5 Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

a) Sean f y g tales que $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \geq g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x > 0$.

b) Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en $]a, b[$ tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in]a, b[$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$.