Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2 Sección G1 y G2
Semestre Primavera 2017

Prof. Alejandro González Castro
Prof. Iván Morales García
Ayud. Harold Ojeda Gajardo
Ayud. Mario Vega Navarrete

Métodos de Integración

Fracciones Parciales

Caso I. Factores lineales no repetidos

$$\int \frac{du}{(u+4)(u+9)} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{u+4}{u+9}\right| + k$$

Demostración: Descomponemos en fracciones parciales el integrando en la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{(u+4)(u+9)} &= \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u+9} \\ &= \frac{A(u+9)+B(u+4)}{(u+4)(u+9)} \\ &= \frac{(A+B)u+(9A+4B)}{(u+4)(u+9)}.\end{aligned}$$

Entonces, por igualdad de polinomios, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcr} A+B &=& 0 \\ 9A+4B &=& 1 \end{array}\right| \Rightarrow A = \frac{1}{5} \text{ y } B = -\frac{1}{5}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{(u+4)(u+9)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{u+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{u+9} \Rightarrow \int \frac{1}{(u+4)(u+9)}du = \frac{1}{5}\int\frac{1}{u+4}du - \frac{1}{5}\int\frac{1}{u+9}du$$

Note que haciendo $s = u+4$ y $t = u+9$, $ds = dt = du$, se tiene

$$\int \frac{1}{u+4}du = \int\frac{ds}{s} = \ln|s| = \ln|u+4| + k \quad \text{y} \quad \int\frac{1}{u+9}du = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|u+9| + k$$

Luego

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(u+4)(u+9)}du &= \frac{1}{5}\int\frac{1}{u+4}du - \frac{1}{5}\int\frac{1}{u+9}du \\ &= \frac{1}{5}\ln|u+4| - \frac{1}{5}\ln|u+9| + k \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{u+4}{u+9}\right| + k. \quad \square\end{aligned}$$

Caso II. Factores lineales repetidos

$$\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}dx = \ln|x+1| - \frac{3}{2}(x+1)^{-2} + k$$

Demostración: Descomponemos en fracciones parciales el integrando en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^3} \\
&= \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3} \\
&= \frac{Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)}{(x+1)^3}.
\end{aligned}$$

Entonces por igualdad de polinomios se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl}
A & = & 1 \\
2A+B & = & 2 \\
A+B+C & = & 4
\end{array}\right|$$

Luego

$$A = 1, \quad B = 0 \;\; \text{y} \;\; C = 3.$$

Por lo tanto

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3}$$

Así, tenemos

$$\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{(x+1)^3}.$$

Note que haciendo $u = x+1$, $du = dx$, se tiene

$$\int \frac{1}{x+1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x+1| + k,$$

y

$$\int \frac{1}{(x+1)^3}dx = \int u^{-3}du = -\frac{1}{2}u^{-2} = -\frac{1}{2(x+1)^2} + k.$$

Finalmente

$$\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \ln|x+1| - \frac{3}{2(x+1)^2} + k$$

$\square$

Ejemplo **Grado numerador mayor al grado de denominador**

$$\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2| + k$$

Demostración: Note que como el grado del numerador es mayor al grado de denominador resolvemos la división de polinomios y se tiene

$$\frac{x^3-2x}{x^2+3x+2)} = (x-3) + \frac{5x+6}{x^2+3x+2} = (x-3) + \frac{5x+6}{(x+2)(x+1)},$$

descomponiendo en fracciones parciales el último miembro se tiene

$$\frac{x^3-2x}{x^2+3x+2)} = (x-3) + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+2}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2)}dx &= \int (x-3) + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+2}dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2| + k \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo **Caso I y II**

$$\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}dx = 8\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + k$$

Demostración: La descomposición en fracciones parciales es de la forma

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}.$$

Donde se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}dx &= \int -\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x-1}dx \\ &= 8\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + k \quad \square \end{aligned}$$

Caso III. Factores cuadráticos no repetidos

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}\right| + \tan^{-1}(x) - \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

Demostración: Descomponemos en fracciones parciales el integrando en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} \\
&= \frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(3A+2B+C)x+(3B+D)}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}.
\end{aligned}$$

Entonces por igualdad de polinomios se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl}
A+C &=& 0 \\
2A+B+D &=& 0 \\
3A+2B+C &=& 4 \\
3B+D &=& 0
\end{array}\right|$$

Luego

$$A=1, \quad B=1, \quad C=-1 \ \text{ y } \ D=-3.$$

Por lo tanto

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+3}{x^2+2x+3}$$

Así, tenemos

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3}dx.$$

Por un lado, note que haciendo

$$\begin{aligned}
u &= x^2+1 \\
\frac{du}{dx} &= 2x
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+1}dx &= \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}(x) + k
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{x^2+2x+3} &= \frac{x+1+2}{(x+1)^2+2}\\
&= \frac{x+1}{(x+1)^2+2}+\frac{2}{(x+1)^2+2}\\
&= \frac{x+1}{(x+1)^2+2}+\frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}
\end{aligned}$$

Luego, haciendo

$$\begin{aligned}
t &= (x+1)^2+2 & \qquad r &= \frac{x+1}{\sqrt{2}}\\
\frac{dt}{dx} &= 2(x+1) & \qquad \frac{dr}{dx} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}dx &= \int \frac{x+1}{(x+1)^2+2}dx+\int \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}dx\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}+\sqrt{2}\int \frac{1}{r^2+1}dx\\
&= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+2)+\sqrt{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+k
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\int \frac{4xdx}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}(x)-\left[\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+2)+\sqrt{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})\right]+k\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}\right|+\tan^{-1}(x)-\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+k
\end{aligned}$$

$\square$

Caso IV. Factores cuadráticos repetidos

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2(x^2+4)} + k$$

Demostración: Descomponemos en fracciones parciales el integrando en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x^2+4)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{Ax^3+Bx^2+(4A+C)x+(4B+D)}{(x^2+4)^2}.
\end{aligned}$$

Entonces por igualdad de polinomios se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl|}
A & = & 0 \\
B & = & 1 \\
4A+C & = & 0 \\
4B+D & = & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Luego

$$A=0, \quad B=1, \quad C=0 \ \text{ y } \ D=-4.$$

Por lo tanto

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^4}$$

Así, tenemos

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx = \int \frac{1}{x^2+4}dx - \int \frac{4}{(x^2+4)^4}dx.$$

Por un lado, note que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4}dx &= \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + k
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int \frac{4}{(x^2+4)^4}dx \quad = \quad \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]}dx$$

Para evaluar esta integral recurriremos a la sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \tan(s) \\ \frac{dx}{2} &= \sec^2(s)ds \end{aligned}$$

Así,

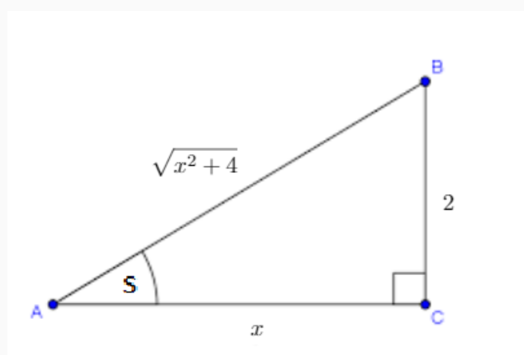
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]}dx &= \int \frac{1}{(\tan^2(s)+1)^2}\cdot 2\sec^2(s)ds \\ &= 2\int \frac{1}{\sec^2(s)}ds \\ &= 2\int \cos^2(s)ds \\ &= \int 1+\cos(2s)ds \\ &= s+\frac{1}{2}\sin(2s)+k \\ &= s+\sin(s)\cos(s)+k \end{aligned}$$

Ahora, en virtud de nuestra sustitución se tiene

$$\cos(s) = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\sin(s) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$s = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$



Finalmente

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right]+k \\ &= \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2(x^2+4)}+k \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicios Propuestos

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+10}{x^2+2x}dx =$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+5}{(x+4)(x^2-1)}dx =$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+2x+x}dx =$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+3)^2)}dx =$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-4)^2}dx =$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}dx =$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-x+9}{x^5+2x^4}dx =$

(h) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^4+9x^2}dx =$

Un Caso Extremo

La descomposición en fracciones parciales para la expresión sería

$$\begin{aligned} \frac{1}{(3x+5)(x-2)^2(x^2+6)(x^2+x+1)^2} &= \frac{A}{3x+5} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+6} \\ &+ \frac{Fx+G}{x^2+x+1} + \frac{Hx+K}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Spoiler

En lo sucesivo se definirá una integral cuyos límites de integración tienen relación con indeterminaciones, uno de estos casos es el siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\right] = \lim_{a\to-\infty}\left[\lim_{b\to\infty}\left(F(b)-F(a)\right)\right]$$

Ejemplo

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{(u+4)(u+9)} =$$

Demostración: Note que

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{du}{(u+4)(u+9)} &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{du}{(u+4)(u+9)} \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{5}\ln\left|\frac{u+4}{u+9}\right|\Bigg|_1^t\right] \\ &= \frac{1}{5}\lim_{t\to\infty}\ln\left|\frac{t+4}{t+9}\right| - \ln(2^{-1}) = \frac{\ln(2)}{5} \qquad \square \end{aligned}$$