



Métodos de Integración

30 de noviembre de 2018

Tabla de Primitivas

$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k, r \neq -1$	$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + k, x \neq 0$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + k$	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + k$
$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + k$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + k$
$\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + k$	$\int e^x dx = e^x + k$

Pregunta 1

Método: Cambio de Variable

$$\int \sqrt[n]{1 + \pi \sin(x)} \cos(x) dx = \frac{n}{\pi(n+1)} (1 + \pi \sin(x))^{\frac{n+1}{n}} + k$$

Demostración: Sea

$$\begin{aligned} u &= 1 + \pi \sin(x) \\ \frac{du}{dx} &= \pi \cos(x) \end{aligned}$$

donde

$$\cos(x) dx = \frac{1}{\pi} du,$$

luego ejecutando el cambio de variables se tiene

$$\begin{aligned} \int \sqrt[n]{1 + \pi \sin(x)} \cos(x) dx &= \int \sqrt[n]{u} \cdot \frac{1}{\pi} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int u^{\frac{1}{n}} du \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{u^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + k \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} (1 + \pi \sin(x))^{\frac{n+1}{n}} + k \end{aligned}$$

□

Observación

Si consideramos una función $f \in C^1$ y hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ \frac{du}{dx} &= f'(x) \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int f^n(x) f'(x) dx &= \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)} + k & \text{(iii)} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln(|f(x)|) + k \\ \text{(ii)} \quad \int e^{f(x)} f'(x) dx &= e^{f(x)} + k \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

$$\text{(a)} \quad \int \frac{dx}{x \ln^3(x)} =$$

$$\text{(d)} \quad \int \frac{x}{x^2 + \pi} dx =$$

$$\text{(g)} \quad \int \frac{1 + \ln(x)}{3 + x \ln(x)} dx =$$

$$\text{(b)} \quad \int x e^{x^2} dx =$$

$$\text{(e)} \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\text{(h)} \quad \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx =$$

$$\text{(c)} \quad \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4 + 6}} dx =$$

$$\text{(f)} \quad \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx =$$

Ejercicio Recuerdo

Calcule la integral $\int_{-3}^7 h(x) dx$, donde

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+7}{2}, & x \in [-3, -1] \\ 2x^2 + 1, & x \in (-1, 3] \\ 19, & x \in (3, 7] \end{cases}$$

Pregunta 2

Método: Integración Por Partes

$$\int x^2 e^{\pi x} dx = \frac{x^2 e^{\pi x}}{\pi} - \frac{x e^{\pi x}}{2} + \frac{1}{4} e^{\pi x} + k$$

Demostración: Consideremos

$$\begin{array}{ll} u &= x^2 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \frac{dv}{dx} &= e^{\pi x} \\ v &= \frac{1}{\pi} e^{\pi x} \end{array}$$

donde

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

luego integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\pi x} dx &= \frac{x^2 e^{\pi x}}{\pi} - \int \frac{1}{\pi} e^{\pi x} \cdot 2x dx \\ &= \frac{x^2 e^{\pi x}}{\pi} - \frac{2}{\pi} \int x e^{\pi x} dx \end{aligned}$$

Note que haciendo

$$\begin{array}{ll} \tilde{u} &= x \\ \frac{d\tilde{u}}{dx} &= 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \frac{d\tilde{v}}{dx} &= e^{\pi x} \\ \tilde{v} &= \frac{1}{\pi} e^{\pi x} \end{array}$$

e integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int x e^{\pi x} dx &= \frac{x e^{\pi x}}{\pi} - \int \frac{1}{\pi} e^{\pi x} dx \\ &= \frac{x e^{\pi x}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int e^{\pi x} dx \\ &= \frac{x e^{\pi x}}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} e^{\pi x} + k \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando se tiene

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\pi x} dx &= \frac{x^2 e^{\pi x}}{\pi} - \frac{2}{\pi} \int x e^{\pi x} dx \\ &= \frac{x^2 e^{\pi x}}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{x e^{\pi x}}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} e^{\pi x} + k \right] \\ &= \frac{x^2 e^{\pi x}}{\pi} - \frac{2x e^{\pi x}}{\pi^2} + \frac{2e^{\pi x}}{\pi^2} + k \\ &= \frac{e^{\pi x}}{\pi^3} [\pi^2 x^2 - 2\pi x + 2]. \end{aligned}$$

□

Ejercicios Propuestos

$$(a) \int e^x \cos(x) dx =$$

$$(d) \int \sqrt{x} \ln(x) dx =$$

$$(g) \int (x) dx$$

$$(b) \int x(\cos(x) - \sin(x)) dx =$$

$$(e) \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx =$$

$$(h) \int \cos(\ln(x)) dx =$$

$$(c) \int x^2 e^{4x} dx =$$

$$(f) \int \frac{e^{2x}}{5(e^{2x} + 4)} + \frac{e^{2x}}{5(e^{2x} + 9)} dx =$$

Observación

Los métodos anteriormente mencionados en términos de integrales definidas son de la forma:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Ejemplo

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{(2x)^2 + 9}} dx = 2$$

Demostración: Sea $u = 2x$, $du = 2dx$ donde $u(0) = 0$ y $u(2) = 4$. Luego ejecutando el cambio de variables se tiene

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{(2x)^2 + 9}} dx = \int_0^4 \frac{u}{\sqrt{u^2 + 9}} du$$

Ahora, consideremos $t = u^2 + 9$, $dt = 2u du$ donde $t(0) = 9$ y $t(4) = 25$ la integral se transforma en

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{4}{\sqrt{u^2 + 9}} du &= \frac{1}{2} \int_9^{25} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \sqrt{t} \Big|_9^{25} = 2 \end{aligned}$$

□

Recuerdo

Es prudente traer a nuestra retina algunas identidades trigonométricas útiles pues serán de gran ayuda para resolver varios tipos de integrales, por mencionar alguna de ellas

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x) \text{ y } \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

No es difícil deducir

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Pregunta 3

Método: Funciones Trigonómicas

$$\int \sin^4(x) dx = \frac{1}{32}(12x - 8\sin(2x) + \sin(4x)) + k$$

Demostración: Note que

$$\sin^4(x) = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \cos(2x) + \frac{\cos^2(2x)}{4}$$

y

$$\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$$

por lo tanto

$$\sin^4(x) = \frac{3}{8} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int \sin^4(x) dx &= \int \frac{3}{8} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8} dx \\ &= \int \frac{3}{8} dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \frac{1}{8} \int \cos(4x) dx \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) + k \\ &= \frac{1}{32}(12x - 8\sin(2x) + \sin(4x)) + k \quad \square \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

(a) $\int \tan^2(x) dx =$

(b) $\int \sec^3(x) dx =$

(c) $\int \frac{\sec^3(x)}{\tan(x)} dx$