Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1 Sección G1 y G2
1*er*. semestre de 2017

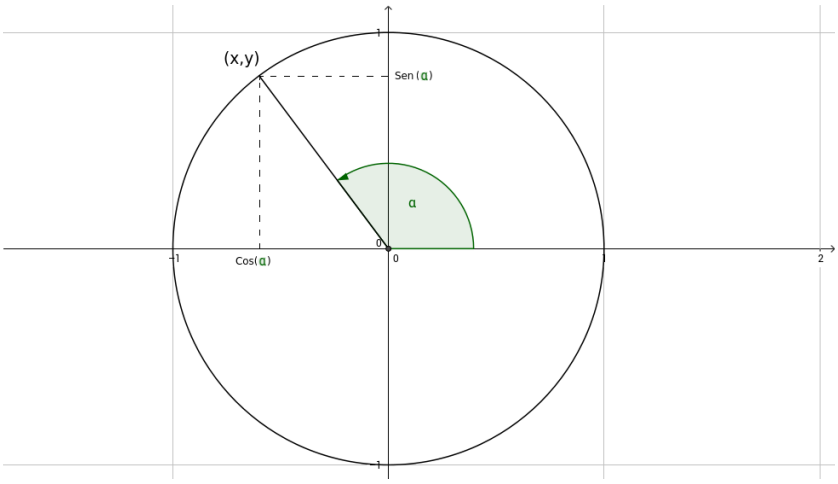
Prof. Alejandro González
Prof. Iván Morales
Ayud. Harold Ojeda
Ayud. Mario Vega

Trabajo en Clases 10
Trigonometría
10/06/2017

Se definen la funciones seno y coseno como siguen:

$$\begin{array}{rccc} \text{sen}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & \text{sen}(\alpha) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & \cos(\alpha) \end{array}$$

donde $\text{sen}(\alpha)$ corresponde a la proyección sobre el eje vertical del único par (x, y) que determina el ángulo α en la circunferencia unitaria. Mientras que $\cos(\alpha)$ corresponde a la proyección sobre el eje horizontal del único par (x, y) que determina el ángulo α en la circunferencia unitaria.



1. Con el objetivo de esbozar los gráficos de ambas funciones complete la siguiente tabla de valores:

(a)

Grados	Ángulo	sen	cos
$0°$			
$30°$			
	$\pi/4$		
	$\pi/3$		
$90°$			
$120°$			
$135°$			
	$5\pi/6$		
	π		

Grados	Ángulo	sen	cos
$210°$			
	$5\pi/4$		
$240°$			
	$3\pi/2$		
$300°$			
$315°$			
	$7\pi/4$		
	$11\pi/6$		
$360°$			

(b)

Grados	Ángulo	sen	cos
$0°$			
$-30°$			
	$-\pi/4$		
	$-\pi/3$		
$-90°$			
$-120°$			
$-135°$			
	$-5\pi/6$		
	$-\pi$		

Grados	Ángulo	sen	cos
$-210°$			
	$-5\pi/4$		
$-240°$			
	$-3\pi/2$		
$-300°$			
$-315°$			
	$-7\pi/4$		
	$-11\pi/6$		
$-360°$			

2. (a) Observe que, como la relación coseno se define a partir de la circunferencia unitaria, $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a.1) Considere $z \in [-1, 1]$. Grafique la circunferencia de radio uno centrada en el origen y la recta $x = z$. ¿Existirá un ángulo α tal que $\cos(\alpha) = z$? Concluya que el conjunto imagen de la función coseno es $[-1, 1]$.

   (a.2) Si $z = \dfrac{1}{2}$ como en (a.1), encuentre un $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{2}$. ¿Existirá $\beta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ tal que $\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}$?

   (a.3) A parir de (a.2) decida cuántas soluciones tiene la ecuación $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{2}$ cuando $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre el conjunto solución de dicha ecuación.

   (b) Observe que, como la relación seno se define a partir de la circunferencia unitaria, $\text{sen}(\alpha) \in [-1, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b.1) Considere $z \in [-1, 1]$. Grafique la circunferencia de radio uno centrada en el origen y la recta $y = z$. ¿Existirá un ángulo α tal que $\text{sen}(\alpha) = z$? Concluya que el conjunto imagen de la función seno es $[-1, 1]$.

   (b.2) Si $z = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ como en (b.1), encuentre un $\alpha \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ tal que $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. ¿Existirá $\beta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}(\beta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$?

   (b.3) A parir de (a.2) decida cuántas soluciones tiene la ecuación $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ cuando $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre el conjunto solución de dicha ecuación.

3. (a) Restrinja la función coseno al intervalo $[0, 2\pi[$:

   (a.1) Demuestre que la función coseno no es inyectiva en $[0, 2\pi[$.

   (a.2) A partir de la construcción de esta función con la circunferencia unitaria, encuentre intervalos de crecimiento y de decrecimiento de coseno en $[0, 2\pi[$.

   (b) Restrinja la función seno al intervalo $[0, 2\pi[$:

   (b.1) Demuestre que la función seno no es inyectiva en $[0, 2\pi[$.

   (b.2) A partir de la construcción de esta función con la circunferencia unitaria, encuentre intervalos de crecimiento y de decrecimiento de seno en $[0, 2\pi[$.