

Control 6 Optativo - Algebra y Geometría
27 de Agosto de 2015

Nombre: Pawta

Responda la siguiente pregunta.

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Determine el polinomio característico de A. **2 PTO**
b) Encuentre todos los valores propios de A. **1,0 PTO**
c) Hallar una base para cada subespacio propio asociado a cada valor propio de A. **2 PTO**
d) ¿Es A una matriz diagonalizable? Justifique su respuesta. **1,0 PTO**

$$a) P(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(3-\lambda)(-\lambda)-4] - 2[2(3-\lambda)-8] + 4(4+\lambda)$$

$$P(\lambda) = (3-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda - 4] - 4(3-\lambda-4) + 16(\lambda+1)$$

$$P(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) + 4(\lambda+1) + 16(\lambda+1)$$

$$P(\lambda) = (\lambda+1)[(3-\lambda)(\lambda-4) + 4 + 16]$$

$$P(\lambda) = (\lambda+1)[3\lambda - \lambda^2 - 12 + 4\lambda + 4 + 16]$$

$$P(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-8)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8) \text{ polinomio característico de A. } \underline{\underline{2 PTO}}$$

b) Los valores propios SON los λ que resuelven $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$
PARA NUESTRA MATRIZ A, LOS VALORES PROPIOS SERÍAN.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 8 \end{array} \right\}$$

1,0 PTO

⊂ CADA subespacio propio V_λ asociado al $\text{Ker}(A - \lambda I)$
para $\lambda = -1$

$$\text{Ker}(A - (-1)I) = \begin{pmatrix} 3+1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3+1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2), E_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y + 2z = 0$$

$$y = -2x - 2z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x-2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente $W_{(-1)} = \text{Ker}(A - (-1)I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

con $\alpha_A(-1) = 2$ y $\rho_A(-1) = 2$

4.0 PTO

Para $\lambda = 8$

$$\text{Ker}(A - 8I) = \begin{pmatrix} 3-8 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3-8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2y, z = 2y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente $W_{(8)} = \text{Ker}(A - 8I) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

con $\alpha_A(8) = 1$ y $\rho_A(8) = 1$

4.0 PTO

d) según lo visto en clase, se tiene que $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si para todo valor propio λ de A , se tiene que $\rho_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$

como esto se cumple tanto para $\lambda = -1$ y $\lambda = 8$
 concluimos que A es diagonalizable, es más

4.0 PTO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$