Universidad de Chile
Programa de Bachillerato

Control 5 - Algebra y Geometría

13 de Agosto de 2015

Nombre: Pauta

Responda la siguiente pregunta.

Dada la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - 3z \\ 4x - y - z \end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz representante de T en la bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ repectivamente y escriba matricialmente $T(X) = AX$ para $X \in \mathbb{R}^3$. 2ptos

b) Hallar una base para el núcleo $ker(T)$ y encuentre la dimensión de $Im(T)$. 2ptos

c) ¿Es T una función inyectiva? ¿Es epiyectiva? Justifique su respuesta. 1pto

d) Encuentre la matriz representante de T de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,0,-1), (0,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. 1pto.

a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A x$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1pto

Por lo tanto

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$

con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 1pto

b) $Ker(T) \Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ si y solo si

$2x - y - 3z = 0 \Rightarrow y = 2x + 3z$

$4x - y - z = 0 \quad y = -4x + z$

$\Rightarrow -2x + 3z = -4x + z$

$2x = -2z$

$\Rightarrow x = -z \ (1)$

Por lo tanto

$-2z - y - 3z = 0$

$\Rightarrow y = -5z$

Así $Ker(T) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ ó $Ker(T) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ 1pto

<u>Otra forma</u>

Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y-3z \\ 4x-y-z \end{pmatrix} = 0 \quad \in Ker(T)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x = -z$

$y = -5z$

Por lo tanto $Ker\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ 1 pto

$Im(T) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ claramente l.d ya que

$dim(\mathbb{R}^2) = 2$, necesito al ~~menos~~ dos vectores, probemos con

$\left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle$, probemos que si son l.i

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2\alpha - \beta = 0 \wedge 4\alpha - \beta = 0$

restando ambas $+2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0$

por lo tanto son l.i

$\Rightarrow Im(T) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

y $\underline{dim(Im(T)) = 2}$ 1 pto

Otra forma, según teorema del núcleo-Imagen.

Siendo U, V dos subespacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

$T: U \to V$ es transformación lineal.

$dim(U) = dim\,Ker(T) + dim\,Im(T)$

en este caso $U = \mathbb{R}^3 \Rightarrow dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 1 + dim\,Im(T)$

$\Rightarrow dim\,Im(T) = 3 - 1 = 2$ 1 pto

c) Por teorema de las transformaciones

Si $Ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow T$ es inyectiva, para este caso $Ker(T) \neq \{0\}$, por lo tanto T no es inyectiva 0,5 p

Si $dim(Im(T)) = V$, con $T: U \to V$ transformación lineal, T es epiyectiva, en este caso $dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(T))$

Por lo tanto T es epiyectiva 0,5 ptos.

d) $B = \{(1,1,0), (1,0,-1), (0,-1,1)\}$ y base canónica de $\mathbb{R}^2 = \{(1,0), (0,1)\}$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1-0 \\ 4-1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0+3 \\ 4-0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-3 \\ 0+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,5

Por lo tanto

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

con $A_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 0,5